تأثیر آموزش تجسم محور بر عملکرد حل مسئله ریاضی دانش آموزان سال سوم راهنمایی*

دکتر ابراهیم ریحانی[۰۱]
جواد حاجی بابایی [۰۲]
رضا عرب زاده [۰۳]

چکیده

پژوهش حاضر با هدف شناسایی تأثیر آموزش با محوریت تجسم، بر نگرش دانش‌آموزان (سال سوم راهنمایی) نسبت به ریاضیات، و نیز عملکرد حل مسئلهٔ آنها، به ویژه در حل مسئله‌های مربوط به تعمیم الگوهای شکلی در جبر» صورت گرفته است. بدین منظور در مرحلهٔ نخست، به‌عنوان یک هدف پایه، چارچوبی برای آموزش، تجسم محور و آموزش، بدون تأکید بر تجسم، بر اساس یافته‌های پژوهشی و بر پایهٔ کار میدانی طراحی و تولید شد. برای انتخاب نمونه از روش نمونه‌گیری تصادفی استفاده شد و از این طریق یک مدرسه و دو کلاس ۳۰ نفره از آن به‌عنوان گروه آزمایش و گروه کنترل، انتخاب گردید. در این پژوهش «رویکرد آموزش با محوریت تجسم و آموزش بدون تأکید بر تجسم» به‌عنوان متغیرهای مستقل، و «عملکرد حل مسئله و نگرش دانش‌آموزان» به‌عنوان متغیرهای وابسته در نظر گرفته شده‌اند. هر یک از گروه‌های آزمایش و کنترل به مدت ۱۵ هفته (هر هفته دوجلسه و هر جلسه ۹۰ دقیقه) تحت تأثیر متغیرهای مستقل قرار گرفتند.

در این پژوهش سه فرضیه مورد آزمون قرار گرفته‌اند، که شاخص عملکرد هر سه فرضیه تفاوت نمرات پیش آزمون و پس آزمون و مقایسهٔ گروه‌های مورد مطالعه است. پس از جمع‌آوری اطلاعات جهت آزمودن فرضیه‌ها از آزمون T گروه‌های مستقل استفاده شده است. برای معنادار بودن تفاوت میانگین نمرات دانش‌آموزان دو گروه و نیز برای بررسی تجانس واریانس‌ها از آزمون F (لوین) استفاده شد. یکسان بودن عملکرد حل مسئله دانش‌آموزان در پیش آزمون، با استفاده از آزمون کلموگروف اسمیرنوف نشان داده شده

تاریخ دریافت مقاله: ۸۹/۳/۱ تاریخ شروع بررسی: ۸۹/۳/۸ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۰ /۵/۲۱

۰۱. عضو هیئت علمی دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی، e_reyhani@yahoo.com

۰۲. کارشناس سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی وزارت آموزش و پرورش، Jhajibabaei@yahoo.com

۰۳. کارشناس ارشد آموزش ریاضی و دبیر آموزش و پرورش شهرستان بروجرد، arabzadehdanesh@yahoo.com

است. تجزیه و تحلیل نتایج نشان می‌دهد که تدریس تجسم محور، در نگرش دانش‌آموزان نسبت به ریاضیات تأثیر مثبت چشمگیری خواهد گذاشت، اما تنها تکیه بر تفکر تجسمی باعث تحول در عملکرد «حل مسئلۀ» ریاضی به ویژه در مسئله‌های غیر هندسی، مانند تعمیم الگوهای شکلی، نخواهد شد. از طرف دیگر دانش‌آموزانی که به روش تجسم محور آموزش دیده‌اند بهتر می‌توانند روابط بین اجزای موجود در جملۀ عمومی دنباله‌ها را درک کنند.

واژه‌های کلیدی: تجسم، حل مسئله ریاضی، تدریس تجسم محور، الگوهای شکلی، نگرش ریاضی.

مقدمه

یک هدف عمده از آموزش ریاضیات به دانش‌آموزان توسعۀ درک ریاضی و رشد توانایی حل مسئلۀ آن‌ها است. بسیاری از افراد می‌دانند که بخشی از اندیشیدن به شیوه تجسمی[۴] صورت می‌گیرد. تجسم متضمن همان باز نمایی‌ها[۵] و فرایندهای ادراک است (فینک[۶] ۱۹۸۵، نقل شده از اسمیت[۷] و دیگران ۲۰۰۳). از گذشته‌های دور نقش تجسم در یاددهی و یادگیری ریاضیات به طور عام، به ویژه در حل مسئلۀ ریاضی مطرح بوده است. اما در سالیان اخیر، این موضوع به‌طور عمیق‌تری توسط آموزشگران ریاضی مورد مطالعه قرار گرفته است. در سند «اصول و استانداردهای ریاضیات مدرسه‌ای[۸] »آمده است که تجسم نقشی مهم در حل مسئله‌های ریاضیات دارد. بنابراین «دانش‌آموزان باید برای به کارگیری انواع بازنمایی‌های تجسمی و هماهنگ ساختن آنها برای تحلیل مسائل و موضوعات ریاضی، کسب تجربه کنند» (NCTM، ۲۰۰۰، ص۴۲). در همین راستا معلم و روش تدریس او به منزلۀ دو عنصر اصلی در فرایند آموزش از اهمیت خاصی برخوردارند، بدین معنا که هرچند عملکرد دانش‌آموزان در حل مسئله می‌تواند تحت تأثیر عوامل متفاوتی قرار گیرد، اما روش آموزش، (معلم) در این میان نقشی اساسی بر عهده دارد.

بیان مسئله

آلبرت انیشتین[۹](۱۹۵٤) در نامه‌ای به آدمار[۱۰] چنین اظهار می‌دارد که بیشتر در قالب تصاویر ذهنی به موضوعات فکر می کند و به کارگیری لغات در اولویت‌های بعدی قرار دارند (فنما[۱۱] ۱۹۷۹، نقل شده از ویزدو[۱۲] ۱۹۹۲). او گفته است که به ندرت در قالب کلمات می‌اندیشد، بلکه افکارش را در اشکال و صورت‌های کم و بیش روشنی که به دلخواه قابل باز آفرینی و

ترکیب هستند شکل می‌دهد. برخی از ریاضیدانان پا را از این فراتر گذاشته و ادعا می‌کنند که انجام همه تکالیف ریاضی به تفکر فضایی[۱۳] نیاز دارد (وولنر[۱۴] ۲۰۰۴). تجسم و تصور در تاریخ شکل‌گیری مفاهیم ریاضی دارای اهمیتی خاص می‌باشد. به‌طوری که انکار اهمیت تفکر تجسمی به معنای قطع ریشه‌های تاریخی شکل گیری مفاهیم ریاضی است. توجه بیش از حد به تدریس کلامی موضوع[۱۵] (توصیف زبانی درس‌ها و اطلاعات آموزشی) باعث می‌شود ریاضیات در حد کلام باقی بماند (همان منبع). متأسفانه چارچوب مدون و کاملی برای تدریس مبتنی بر تفکر تجسمی در دسترس معلمان قرار ندارد. به علاوه مشکل فقط در نحوهٔ تدریس نیست، بلکه کتاب‌های درسی نیز آن گونه که شایسته است به این موضوع نپرداخته‌اند. بیشاب[۱۶] (۱۹۸۳) در این باره می‌گوید: « دانش‌آموزان به پردازش‌های تجسمی علاقه دارند، در حالی که متأسفانه معلمان و متون درسی آنها را تحریک نمی‌کنند». از دیدگاه او ریاضیات مدرسه‌ای به یک مشت محاسبات تبدیل شده است به‌طوری که «یک دانش‌آموز می‌تواند بدون نیاز به سامان‌دهی تفکرات تجسمی خود دریادگیری ریاضیات مدرسه‌ای موفق باشد» (پرزمگ[۱۷] ،۱۹۸۶). یکی از مهم‌ترین دغدغه‌های آموزشگران ریاضی، ضعف دانش‌آموزان در استفاده از تفکر تجسمی در حل مسئله های ریاضی و یا در آموزش جبر، به ویژه در دورهٔ راهنمایی تحصیلی، است (ریورا[۱۸] ،۲۰۱۱). در کشور ما ایران نیز این نگرانی وجود دارد، زیرا ارزیابی‌های بین‌المللی مانند آزمون تیمز[۱۹] حکایت از عملکرد ضعیف دانش‌آموزان دوره راهنمایی کشورمان در حل مسئله ریاضی دارد (کیامنش ۱۳۷۹). این تحقیق در پی آن است که ابتدا چارچوبی برای تدریس به روش تجسم محور را ارائه نماید، سپس تأثیر «آموزش با تأکید بر تجسم» و «آموزش بدون تأکید بر تجسم» را بر عملکرد حل مسئلهٔ ریاضی دانش‌آموزان مورد مقایسه و بررسی قرار دهد و نگرش دانش‌آموزان مورد پژوهش نسبت به ریاضیات را نیز با هم مقایسه نماید.

مروری بر تحقیقات انجام شده

تاکنون پژوهش‌های زیادی به منظور بررسی عوامل مؤثر بر پیشرفت عملکرد حل مسئله دانش‌آموزان صورت گرفته است. اما بنابر بررسی‌های انجام شده توسط پژوهشگران این مقاله، تاکنون در مورد «نقش تفکر تجسمی بر پیشرفت عملکرد حل مسئله دانش‌آموزان در ایران»، پژوهش قابل اتکایی صورت نگرفته است. شاید بتوان تحقیقات کروتتسکی[۲۰] (۱۹۷۶) را در زمره اولین تحقیقات تخصصی در این زمینه دانست که درآن پردازش اصلی ریاضی، توسط افراد به سه دسته تقسیم شده است:

الف. پردازش تحلیلی، که بیشتر بر پردازش زبانی ـ منطقی تأکید دارد.

ب. پردازش هندسی، که تأکید اصلی بر پردازش تجسمی است.

ج. پردازش هماهنگ، که به هر دو مورد الف و ب اشاره دارد (ویتلی[21] ۱۹۹۷، اسپینوال و شاو[22] ۲۰۰۲، وک بیکر[23] ۲۰۰۷).

لین و کلمنتس[24] (۱۹۸۱، نقل شده از وک بیکر۲۰۰۷) چنین نتیجه گرفتند که، استفاده از تصور همیشه ما را به حل مسائل نخواهد رساند. چه، اغلب دانش‌آموزانی که در استفاده از ابزارهای کلامی مهارت بیشتری دارند، نسبت به دانش‌آموزانی که از ابزارهای تجسمی در حل مسائل ریاضی استفاده می‌کنند، پیشی می‌گیرند. فنما و تارتر[25] (۱۹۸۵) هم در پژوهشی نشان دادند که توانایی‌های تجسمی و کلامی، هر یک می تواند بسته به موقعیت تأثیر بسزایی داشته باشد.

در برخی از تحقیقات، تصاویر ذهنی و تجسم مانع حل مسئله ریاضی دانسته شده مگر این‌که نحوه تصویرسازی ذهنی صحیح به دانش‌آموزان نیز آموخته شود. به عنوان مثال پرزمگ (۱۹۸٦و b۲۰۰۸) متأثر از تحقیقات کروتتسکی، اسپینوال و شاو (۲۰۰۲) در مطالعات موردی خود، به این نکته اشاره دارد که تصویرهای تجسمی از جمله عوامل اصلی است که دانش‌آموزان را به پاسخ غلط می رساند. او در این تحقیق پنج نوع مختلف از تصاویر ذهنی را برمی‌شمارد، که شامل موارد زیر است:

۱. تصویرسازی واقعی (عینی): تصاویر – در– ذهن[26] ، مانند تجسم حرف انگلیسی R.

۲. تصویرسازی الگویی: رابطه محض در طرح فضایی ـ تصویری؛ مانند تجسم تغییر علامت نسبت‌های مثلثاتی در چهار ربع دایره مثلثاتی که در هر ربع به ترتیب از بالا به پایین، علامت‌های سینوس، کسینوس، تانژانت وکتانژانت درج شده است.

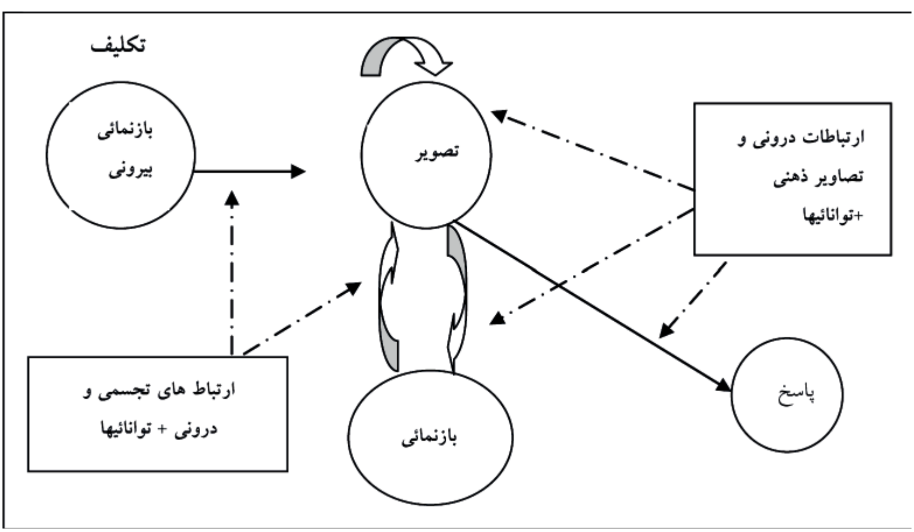
۳. تجسم حافظه‌ای فرمول‌ها: تجسم گراها فرمول‌های نوشته شده روی تخته یا دفترچه را در ذهن خود مشاهده می‌کنند. آنها مثلاً نماد رادیکال را، در فرمول فاصلهٔ بین دو نقطه در دستگاه مختصات در ذهن خود تجسم می‌کنند.

٤. تجسم جنبشی؛ که نیازمند فعالیت‌های عضلانی است. مثلاً می توان با انگشتان دست تجسم یک ربع دایره را نشان داد.

۵. تصویرسازی متحرک؛ که چرخش اجسام در ذهن، از نمونه‌های آن است.

تحقیقات پرزمگ اساس بسیاری از تحقیقات، از جمله پژوهش حاضر است. لین وکلمنتس (۱۹۸۱)، پرزمگ (۱۹۸٦) و باتیستا[27] (۱۹۹۰ نقل شده از پرزمگ b ۲۰۰٦) با استفاده از

تحقیقاتشان پیشنهاد می‌کنند که روش‌های منطقی کلامی باید به‌عنوان مکمل روش‌های تجسمی حل مسئله به کار گرفته شود. گوتیرز[۲۸] (۱۹۹۶) به بررسی نقش تجسم و حل مسائل هندسه در فضای سه بعدی پرداخت. نتیجهٔ این تحقیق ارائه چارچوبی برای نمایش چگونگی حل یک مسئله هندسی از طریق تجسم است (شکل ۱). در شکل ۱، تکلیف داده شده به دانش‌آموزان به عنوان یک عامل تجسمی بیرونی در نظر گرفته می‌شود. گوتیرز معتقد است که این تجسم منجر به تولید تصویر ذهنی مقدماتی از فرایند استدلال تجسمی می‌گردد. این تصویر، نخستین تصویر تشکیل یافته در ذهن دانش‌آموزان است. چگونگی تصویر ایجاد شده به نوع مسئله و توانایی دانش‌آموز بستگی دارد. همان‌طور که در شکل نشان داده شده است برای رسیدن به پاسخ، نیاز به ارتباط بین بازنمایی‌های ذهنی درونی و بیرونی تکلیف و تصاویر ذهنی مرتبط با پیش نیازهای مسئلهٔ داده شده می‌باشد. این تصاویر ذهنی در تعامل با یکدیگرند. لازم به ذکر است که خلق یک تصویر، فرایند پیچیده‌ای است که با آموزش و تمرین تحقق می‌یابد.



شکل ۱: فرایند حل تجسمی یک مسئله (گوتیرز ۱۹۹۶)

ویتلی و گری سون (۱۹۹۷) نشان دادند که در استدلال ریاضی رویکرد تجسمی بر رویکرد غیرتجسمی، برتری دارد. کابرال[۲۹] (۲۰۰۴) متأثر از پژوهش‌های بیشاب (۱۹۸۳) به این نتیجه رسید که رعایت سطوح عنوان شده در مدل فن هیلی[۳۰] و استفاده از تجسم تأثیر بسزایی در

حل مسائل دارد. مدل فن هیلی تفکر هندسی از پیش دبستانی تا دانشگاه را به پنج سطح شامل سطح دیداری[۳۱] و تشخیص، سطح تجزیه و تحلیل[۳۲]، سطح استنتاج غیررسمی[۳۳](تجربه)، سطح استنتاج رسمی[۳۴] و سطح دقت[۳۵] تقسیم می‌کند که در آن ورود به هر سطح نیازمند عبور از سطح قبلی است (ریحانی، ۱۳۸۰و غلام آزاد، ۱۳۷۹). در سال‌های اخیر تحقیقات این حوزه، به‌صورت دقیق‌تری روی مباحث خاصی متمرکز شده است. اسپینوال و شاو(۲۰۰۲) نیز همانند پرزمگ در مطالعات خود، به این نکته که تصویرهای تجسمی از جمله عوامل اصلی است که دانش‌آموزان را به پاسخ غلط می‌رساند، اشاره می‌کنند. دلیما و تال[۳۶] (۲۰۰۸) پژوهشی بر روی دانشجویان در درس جبرخطی انجام دادند و چنین نتیجه گرفتند که دانشجویانی که از تجسم در حل مسائل جبرخطی استفاده کرده‌اند، موفق به حل مسائل بیشتری شده‌اند.

لاجینیان[۳۷] (۲۰۰۸) در پژوهشی نشان داد که دانش‌آموزان با استفاده از دیدگاه تجسمی در درس حسابان بهتر به مفهوم حد دست خواهند یافت و ولنر(۲۰۰٤) از مطالعهٔ خود چنین نتیجه گرفت که استفاده از رویکرد تجسمی همراه با اعتماد صد در صدی نسبت آن مناسب نیست. نتیجه دیگر تحقیق وی این بود که تعادل کمی بین رویکرد تجسمی و رویکرد کلامی در جامعهٔ مورد پژوهش وجود دارد. سامسون[۳۸] (۲۰۰۷) و ریورا (۲۰۰۷و۲۰۱۱) نشان دادند که تجسم می‌تواند در تعمیم جبری، به ویژه در کشف جملهٔ n ام یک دنباله از اشیاء الگویی بسیار مؤثر باشد. به علاوه ریورا (۲۰۰۷و۲۰۱۱) نتیجه می‌گیرد که اگر دانش‌آموزان از دیدگاه تجسمی به الگوهای شکلی نگاه کنند، می‌توانند ارتباط بین فرمول‌های کشف شده را به درستی بیان کنند. ریورا (۲۰۱۱) با جمع‌آوری نتایج تحقیقات انجام شده، علاوه بر تأکید بر اهمیت تفکر تجسمی در آموزش ریاضی، یک برنامهٔ درسی تجسم محور را نیز پیشنهاد می‌کند. نتایج متفاوت و گاهی ناسازگار در این حوزه، نیاز به تحقیقات بیشتر را آشکار می‌سازد. هرچند برخی از تحقیقات از تأکید بر تجسم در فرایند یاد دهی و یادگیری حمایت نمی‌کنند، اما به نظر می‌رسد، بیشتر تحقیقات انجام شده، بر آموزش مبتنی بر تجسم اصرار می‌ورزند و هیچ گاه به کار گیری تفکر تجسمی را نادیده نمی‌گیرند. نتایج این تحقیقات، نشان دهندهٔ این است که با آموزش می‌توان تصاویر ذهنی فراگیران را اصلاح نمود و آنها را در جهت حل مسئله یاری نمود. بنابراین زمینه‌ای وسیع برای تحقیق، بخصوص در ایران، وجود دارد، هر چند «پژوهش در این حوزه بسیار دشوار است» (پرزمگ b۲۰۰٦).

تعریف واژه‌ها

• **تدریس تجسم محور**: روش تدریسی است که در آن معلم ریاضیات تا جایی که می‌تواند از نمایش‌های تجسمی و تصاویر ذهنی استفاده می‌کند. روش تدریس غیر تجسمی، روشی است

که در آن معلم از شیوه‌های تجسمی و تصویری کمتر استفاده می‌کند (پرزمگ ۱۹۸۶). در این تحقیق روش را تدریسی تجسم محور گوییم، که دارای ویژگی‌های زیر باشد:

۱. میل به انجام روش‌های گرافیکی و تجسمی در تدریس؛

۲. تکیه بر مفاهیم با استفاده از تفکر تجسمی؛

۳. دوری از تدریس به شیوهٔ مجرد، بخصوص هنگامی که تعابیر جبری دشوار باشد. به‌عبارت دیگر تأکید بر روش‌های تجسمی و گرافیکی، حتی در مواقعی که راه‌های غیر تجسمی برای حل مسئله ارائه شده باشد؛

٤. فرمول‌بندی و تخمین زدن با استفاده از اطلاعات گرافیکی هنگام ارائهٔ توضیحات درسی.

• **تدریس بدون تأکید بر تجسم (غیر تجسمی)**: در اینجا منظور از تدریس بدون تأکید بر تجسم ، همان تدریس به شیوه رسمی و صوری، انعطاف ناپذیر و مبتنی بر نمادهای جبری است، که در آن تأکید زیادی روی استفاده از قدرت تجسم، در فرایند تدریس نیست.

• **روش‌های تجسمی وغیر تجسمی حل مسائل ریاضی**[۳۹]: روش حل مسئله تجسمی، شامل تصویر ذهنی همراه با نمودار یا بدون نمودار، به‌عنوان بخش ضروری حل مسئله است که حتی در روش‌های استدلالی و جبری نیز کاربرد دارد. در روش غیر تجسمی حل مسئله، چنین نیست. وجود یا عدم وجود تصاویرذهنی به‌عنوان وجه تمایز روش تجسمی و روش غیرتجسمیِ حل مسائل ریاضی در نظر گرفته می‌شود (پرزمگ ۱۹۸۶).

• **نگرش ریاضی دانش‌آموزان**: حالتی روحی و روانی است که شامل احساس لذت، انگیزش، میزان اهمیت دادن و احساس ترس و نگرانی می‌باشد و هنگام رویارویی فرد با انجام تکالیف ریاضی بر او وارد می‌شود (پاشا شریفی ۱۳۷۲).

چار چوب نظری - عملی مبنای تحقیق

در این بخش تفاوت بین «آموزش تجسم محور» و «آموزش غیر تجسم محور» را مورد بررسی قرار می‌دهیم. باید توجه داشت که نمی‌توان بین دو رویکرد آموزش تجسم محور و آموزش غیر تجسم محور، مرز مشخصی را تعیین نمود. برخی از پژوهشگران (به طور مثال پرزمگ ۱۹۸۶و b ۲۰۰۶) فضای بین این دو رویکرد را به‌عنوان یک رویکرد تلفیقی در نظر می‌گیرند. هر دو روش آموزش تجسم محور و آموزش غیر تجسم محور، می‌توانند معلم محور و یا دانش‌آموز محور باشند. در پژوهش حاضر با توجه به تحقیقات صورت گرفته چارچوبی برای مقایسهٔ آموزش با محوریت تجسم و آموزش بدون تأکید بر تجسم، طراحی، تدوین و مبنا قرار داده شده است (جدول شماره ۱):

جدول ۱. چارچوبی برای آموزش به شیوۀ تجسم محور و آموزش غیر تجسم محور

آموزش تجسم محور	آموزش غیر تجسم محور
مفهوم تجسم • نوعی فعالیت استدلالی و ادراکی، که فقط رسم شکل‌ها و منحنی‌ها نیست (کاسلین۱۹۹۳، گوتیرز ۱۹۹۶، پرزمگ b ۲۰۰۶، نژاد صادقی ۱۳۷۶). • یک عنصر اصلی در فرایند آموزش است (پرزمگ b۲۰۰۶ و a ۲۰۰۸و ۱۹۸۶). تجسم بخشی از فعالیت ریاضی و یک روش حل مسئله است (NCTM۲۰۰۰ ، پرزمگ b ۲۰۰۶). • عاملی که جنبۀ درونی و فرا شناختی دارد (دقت در نگاه). • تجربی، شهودی، تصویری و ذهنی است (ریورا ۲۰۱۱).	مفهوم تجسم • یک تصویر یا خاطره تصویری. صرفاً به کارگیری و رسم اشکال مورد نظر است. • به‌عنوان یک عامل فرعی در فرایند آموزش مورد توجه قرار می‌گیرد (پرزمگ a۲۰۰۸ و b۲۰۰۶). فقط ابزاری برای آموزش است (ریورا،۲۰۱۱). • عاملی که جنبه بیرونی و محیطی دارد (دقت در آنچه که می‌نگری). • الگوریتمی، منطقی، زبانی و دیدن با چشم است (ریورا،۲۰۱۱).
هدف‌های تدریس • اهداف در سطح تعمیم و فراتر از آن خواهند رفت. • کد گذاری اطلاعات به صورت تجسمی و تصویری و به صورت یک کل یک پارچه (سوبانسکی۲۰۰۲). • بر یادگیری مفاهیم و به کار گیری آنها در حل مسئله با تکیه بر فرایند تجسم تأکید دارد (لاجینیان، ۲۰۰۸). • بیان ساختارها به صورت کلی و معین (ریورا، ۲۰۱۱). • راهنمایی تجسمی در حل مسئله و اثبات (ساختن راه‌حل) (کابرال،۲۰۰۴). • پاسخ به «چگونگی و چرایی» (کابرال، ۲۰۰۴). • ایجاد تصاویر ذهنی مرتبط با موضوع و اصلاح تصاویر ذهنی دانش‌آموزان (پرزمگ، b ۲۰۰۶) • فرایند معناسازی که با ایجاد ارتباط بین تصاویر تجسمی، توسط یادگیرندگان انجام می‌گیرد. (لاجینیان، ۲۰۰۸).	**هدف‌های تدریس** • اهداف درسطح ملموس وعینی (کابرال،۲۰۰۴). • تشخیص وکدگذاری اطلاعات به صورت کلامی و به زبان رسمی. • بیان جزئیات به صورت تحلیلی و اثباتی (ریورا، ۲۰۱۱). • بر حل مسئله در موقعیت‌ها و زمینه‌های گوناگون که بیشتر مبتنی بر برهان‌های رسمی و دقیق می‌باشد، تأکید دارد. • پیروی از حل مسئله و اثبات (حل حافظه‌ای) (کابرال،۲۰۰۴). • پاسخ به «چه چیزی» (کابرال،۲۰۰۴).
نقش معلم • استفاده از تصاویر ذهنی و شکل‌ها در فرایند آموزش به عنوان محور اصلی تدریس (پرزمگ ۱۹۸۶، ولنر ۲۰۰۴). • کنترل کننده و هدایت کننده تجسم دانش‌آموزان با توجه به اعمال آنها. • سعی در توسعۀ مهارت‌های ترسیمی، بصری و تجسمی دانش‌آموزان و به کارگیری آنها در فرایند استدلال (پرزمگ ۱۹۸۶).	**نقش معلم** • استفاده از روش‌های زبان رسمی ریاضیات به‌عنوان محور اصلی تدریس (پرزمگ b۲۰۰۸). • کنترل کننده و هدایت کنندۀ عملکرد قابل مشاهده دانش‌آموزان. • سعی در توسعۀ مهارت‌های استدلالی، اثباتی و شفاهی دانش‌آموزان. • ایجاد فرصت‌هایی برای کشف تجسم غلط دانش‌آموزان و سعی در بیان آنچه که در ذهن می‌پرورانند و تشخیص این‌که چه موقعی از تجسم استفاده کنند (پرزمگ، b۲۰۰۶).

نقش دانش آموز • مسئله‌ها را به تصاویر تجسمی متحرک و یا ایستا تبدیل نماید. تأکیدی بر استفاده از نمادهای جبری نیست (پرزمگ، b۲۰۰٦). • بین تصاویر تجسمی مختلف، و در جهت ثبت و تلفیق ایده‌های ریاضی، ارتباط ایجاد کند و آن ایده‌ها را به کارگیرد (کابرال، ۲۰۰٤). دانش‌آموز، تولید کنندهٔ مفاهیم ریاضی است (ریورا، ۲۰۱۱) • تصاویر ذهنی وگفتمان در جهت رفع نقایص آن‌ها را در میان بگذارد.	**نقش دانش‌آموز** • سعی می‌کند مسائل را به زبان رسمی ریاضیات و با توجه به نمادهای جبری بیان نماید. • مسئله ها واثبات‌ها را به زبان رسمی ریاضی (پرزمگ، ۱۹۸٦) بیان کند. دانش‌آموز، اثبات کننده است (ریورا، ۲۰۱۱) • در جهت رفع نقایص احتمالیِ راه‌حل، «گفتمان مبتنی بر علائم جبری» انجام می‌دهد.
معایب • خطاپذیری بیشتر است. • مشاهده و تجسم مشکل‌تر است (نژادصادقی ۱۳۷٦، بوربا و ویلاریل ۲۰۰۵). • تجسم غلط مانع تفکر ثمر بخش است (اسپینوال وشاو ۲۰۰۲، پرزمگ b۲۰۰٦). • تدریس و یادگیری به روش تجسمی دشوارتر است و به توانایی‌های بیشتری نیازمند است (نژادصادقی ۱۳۷٦، بوربا و ویلاریل ، ۲۰۰۵، ریورا، ۲۰۱۱). • عدم تشخیص فرق بین اثبات و دلایل توجیه کننده (جیاکوینتو، ۲۰۰۵). • کنترل زمان و ارزشیابی مشکل است. • برخی از افراد این روش را غیر ریاضی می‌دانند (جیاکوینتو، ۲۰۰۵ و بیشاب ۱۹۸۳). • استفادهٔ کمتر از نیمهٔ‌چپ مغز که جنبهٔ جزء نگر دارد (هیت و همکاران، ۲۰۰۵).	معایب • حل حافظه‌ای، به‌عبارتی تکرار و پیروی از حل مسئله و اثبات‌های انجام شده در کلاس. • باز آفرینی مطالب هنگام آزمون مشکل تر است • میزان دانش پیش نیاز و مبتنی بر علائم جبری زیاد است. • لذت کشف دوباره از بین می‌رود. • تصاویر تجسمی بیشتر ایستا هستند (کابرال، ۲۰۰٤). • مدل سازی وتغییر ایده‌های ریاضی به سختی صورت می‌گیرد. • ماندن در سطح دامنهٔ قابلیت رشد ZPD (کابرال، ۲۰۰٤). • قطع ریشه‌های تاریخی کشف مفاهیم (نژاد صادقی ۱۳۷٤، پرزمگ b۲۰۰٦) • استفادهٔ کمتر از نیمهٔ راست مغز که جنبهٔ کل نگر دارد (هیت و همکاران، ۲۰۰۵).
مزایا • انتقال سریع مفهوم، احترام به تفکر طبیعی و استقلال فکری دانش‌آموزان (بوربا و ویلاریل ۲۰۰۵، نژادصادقی ۱۳۷٦). تهیه یک تصویر کلی از مسئله یا تکلیف (سوبانسکی ۲۰۰۲، کابرال ۲۰۰٤) • رفتن به ماورای ZPD و ساده شدن مسئله ریاضی(کابرال، ۲۰۰٤). • توجه به جنبه‌های دینامیکی تصاویر ذهنی و ارتباط بین آنها (کابرال ۲۰۰٤، ویتلی ۱۹۹۷). • تهیه راهبردهایی آسان برای کدگذاری اطلاعات (کابرال، ۲۰۰٤). • کمک به کشف دوباره و راه حل‌های قانع کننده در غیاب اثبات (جیاکوینتو، ۲۰۰۵). • در نظر گرفتن یک موضوع واحد، از چند دیدگاه مختلف (ریورا ۲۰۰۷، سامسون ۲۰۰۷). • رفتن به لایه‌های عمیق یادگیری مفهومی	**مزایا** • انتقال سریع و راحت محتوای برنامه درسی • تلاش معلم کمتر است • خطا کمتر است و تدریس قابل پیش‌بینی است. • تصاویر ذهنی بیشتر جنبهٔ ثابت و ایستا دارد (کابرال۲۰۰٤). • تمرکز روی جزییات است (کابرال۲۰۰٤). • غالباً ماندن در سطح یادگیری رویه‌ای.

روش و طرح تحقیق

هدف این پژوهش عبارت است از: بررسی تأثیر متغیر مستقل «تدریس تجسم محور و تدریس غیر تجسم محور» بر دانش‌آموزان، در ارتباط با متغیرهای وابستهٔ «میزان پیشرفت عملکرد حل مسئله، تعمیم الگوهای شکلی، توانایی فضایی و نگرش آنها» از آنجا که در هر تحقیق، انتخاب روش تحقیق، به ماهیت موضوع، اهداف تحقیق، فرضیه‌های طرح شده و وسعت امکانات اجرایی بستگی دارد، روش مناسب انجام این تحقیق را روش نیمه آزمایشی با گروه کنترل و پیش آزمون– پس آزمون انتخاب کردیم. دلیل این انتخاب را می توان در عواملی مانند نحوهٔ انتخاب تصادفی گروه‌های کنترل و آزمایش، روش کنترل و دست کاری متغیرها، روش کنترل متغیرهای فرعی، پرسش‌های تحقیق و عدم دخالت محققان در انتخاب دانش آموزان جست‌وجو نمود.

جامعه آماری، نمونه، روش نمونه گیری و حجم نمونه

جامعهٔ آماری این تحقیق، کلیهٔ دانش‌آموزان پسرسال سوم راهنمایی مدارس راهنمایی دولتی شهرستان بروجرد بودند که از روش نمونه گیری تصادفی برای انتخاب نمونه آماری استفاده شد. حجم نمونه ٦۰ نفر بود که از این تعداد ۳۰ نفر به‌عنوان گروه آزمایش و همین تعداد به‌عنوان گروه کنترل انتخاب شدند. سه نفر از گروه آزمایش و سه نفر از گروه کنترل به دلیل عدم حضورشان در فرایند تحقیق، کنار گذاشته شدند.

روش تهیه آزمون

سؤالات پیش آزمون و پس آزمون، با درنظرگرفتن سؤالات مندرج در تحقیقات مرتبط و آزمون‌های معتبر همچون آزمون تیمز (TIMSS، ۲۰۰۳)، تکس[٤۰](TAKS) و مقالاتی که در ارتباط با موضوعات موردتحقیق است جمع‌آوری شد. تست نگرش سنج که چهار ویژگی لذت بردن، انگیزش اهمیت دادن، ترس و نگرانی را ارزیابی می‌کند (پاشا شریفی، ۱۳۷۲)، در جهت آزمون فرضیه سوم به کار گرفته شد. برای پایایی پیش آزمون و پس آزمون از آزمون آلفای کرونباخ[٤۱] استفاده شد.

روش تجزیه و تحلیل داده‌ها

جدول شماره ۲ روش‌های تجزیه تحلیل داده‌ها را بیان می‌کند.

جدول۲. روش‌های تجزیه و تحلیل داده‌ها را بیان می‌کند

روش تجزیه و تحلیل	ابزار اندازه گیری	عملکردی مورد اندازه گیری
آزمون کلموگروف اسمیرنوف	آزمونی شامل ۱۰ سؤال	پیش دانسته های دانش آموزان
t مستقل	تمام سؤالات پس آزمون	عملکرد حل مسئله
t مستقل	سؤالات شماره : ۱۰، ٦، ۵، ۳، ۲، ۱	قدرت تعمیم الگوهای شکلی
همبستگی اسپیرمن	آزمون نگرش ریاضی ویژه دانش آموزان	نگرش ریاضی

یافته‌های پژوهش

۱-۱- آزمون لوین: در بررسی تجانس واریانس‌ها (که یکی از پیش شرط‌های استفاده از آزمون t برای بررسی تفاوت میانگین‌ها می‌باشد) با استفاده از آزمون لوین نتایج زیر حاصل شد :

جدول ۳. نتایج بررسی همگنی واریانس‌ها

متغیر	گروه	میانگین و انحراف استاندارد	F (لوین)	سطح معنی‌داری
متوسط عملکرد حل مسئله	تجسم محور	۱۰/۱۷ ± ۳/۲۲	۰/۵۸	۰/٤۵
	غیر تجسم محور	۸/۹۳ ± ۲/۷۹		
نگرش	تجسم محور	۸۳/۵۲ ± ۱٦/٤۲	۰/۷۵	۰/۱۱
	غیر تجسم محور	۸۱/۲٦ ± ۱۳/۳۲		
افزایش قدرت تعمیم و حل مسائل جبری	تجسم محور	۵/۵٦ ± ۲/۳٤	۱/۰۵	۰/۳۲
	غیر تجسم محور	٤/۹٦ ۱/٦۸		

همان گونه که ملاحظه می‌شود، در مورد متغیرهای موجود در این تحقیق، در بیشتر موارد همگنی واریانس وجود دارد، لذا برای بررسی تفاوت بین میانگین‌های آنها ، از فرمول t در دو گروه متجانس استفاده شد.

۱-۲- آزمون کلموگروف اسمیرنوف

آزمون نرمال بودن یک توزیع، یکی از متداول ترین موارد کاربرد آزمون تطابق توزیع است. آزمون کلموگروف اسمیرنوف[٤٢] برای این هدف مناسب است. نتایج این آزمون در جدول ۳ ارائه شده است. به دنبال تحلیل متغیرهای تحقیق با آزمون کلموگروف اسمیرنوف، درمورد کلیه سؤالات تحقیق، می‌توان چنین نتیجه گرفت که نمونه مورد نظر ما، از جنبه میزان دانش و آگاهیِ درسی تقریباً در یک سطح قرار دارند.

جدول ٤. آزمون نرمال بودن توزیع نمونه (آزمون کلموگروف اسمیرنوف)

	Z	سطح معناداری
سؤال ۱	۳/۹۸	۰/۰۰۰۱
سؤال ۲	۲/۷٦	۰/۰۰۰۱
سؤال ۳	۲/٤۲	۰/۰۰۰۱
سؤال ٤	۲/۷۳	۰/۰۰۰۱
سؤال ٥	۳/۱۸	۰/۰۰۰۱
سؤال ٦	۲/۲۱	۰/۰۰۰۱
سؤال ۷	۲/٥۷	۰/۰۰۰۱
سؤال ۸	۳/۳٤	۰/۰۰۰۱
سؤال ۹	۳/٤۹	۰/۰۰۰۱
سؤال ۱۰	۳/۲۹	۰/۰۰۰۱

۱-۳- پاسخ به پرسش های پژوهشی

• **سؤال اول.** آیا عملکرد حل مسئلهٔ دانش‌آموزان سال سوم راهنمایی که با روش تجسم محور آموزش دیده‌اند، نسبت به دانش‌آموزانی که بدون تأکید بر تجسم آموزش دیده‌اند، بهتر است ؟

برای پاسخ به این سؤال، از آزمون t استیودنت مستقل استفاده شده است که نتایج آن در جدول٥ ارائه شده است.

جدول ۵. نتایج بررسی متوسط عملکرد حل مسئلهٔ دانش‌آموزان سال سوم راهنمایی

روش آزمون	میانگین و انحراف استاندارد	اختلاف میانگین	t مشاهده شده	سطح معناداری
تجسم محور	۱۰/۱۷ ± ۳/۲۲	۱/۲٤	۱/٥٤	۰/۱۳
غیر تجسم محور	۸/۹۳ ± ۲/۷۹			

همان طور که در جدول ۵ مشاهده می‌شود، میانگین عملکرد حل مسئله دانش‌آموزان سال سوم راهنمایی در آموزش به روش تجسم محور (۱۰/۱۷) بیشتر از آموزش بدون تأکید بر تجسم (۸/۹۳) می‌باشد، ولی با توجه به مقدار t به دست آمده (۱/٥٤) که در سطح معنا داری ۰/۱۳ معنادار است و نیز با توجه به درجهٔ اطمینان ۹۵ درصد مـورد نظر ما در این تحقیق (۰/۰۵ =)، می‌توان چنین نتیجه گرفت که متوسط عملکرد حل مسئله دانش‌آموزان سال سوم راهنمایی که با روش تجسم محور آموزش دیده‌اند؛ نسبت به دانش‌آموزانی که بدون تأکید بر تجسم آموزش می‌بینند، بهتر نیست. این نتیجه با نتایج تحقیقاتی مانند لین و کلمنتس (۱۹۸۱)، پرزمگ (۱۹۸٦و a۲۰۰۸)، اسپینوال و شاو (۲۰۰۲) ولنر (۲۰۰٤)و وک بیکر(۲۰۰۷) مطابقت دارد ولی با نتایج تحقیقاتی مانند ماسز (۱۹۹۷ نقل شده از وک بیکر۲۰۰۷)، اسمیت (۱۹٦٤)، کروتتسکی (۱۹۷٦)، آرنیم (۱۹۹۲ نقل شده از کابرال ۲۰۰٤) و گری سون و ویتلی (۱۹۹۷) که مدافع نقش صد در صدی تجسم هستند، سازگار نیست.

• **سؤال دوم.** آیا دانش آموزانی که به روش تجسم محور آموزش دیده اند نسبت به دانش‌آموزانی که بدون تأکید بر تجسم آموزش می‌بینند، دارای نگرش بهتری نسبت به ریاضیات هستند؟

برای پاسخ به این پرسش، از آزمون همبستگی اسپیرمن استفاده شد.

جدول ٦. آ: نتایج بررسی نگرش به ریاضیات در دانش‌آموزان سال سوم راهنمایی

روش آزمون	میانگین و انحراف استاندارد	اختلاف میانگین	t مشاهده شده	سطح معناداری
تجسم محور	۸۳/٥۲ ± ۱٦/٤۲	۲/۲٦	−۰/۲۹	۰/۸۹
غیر تجسم محور	۸۱/۲٦ ± ۱۳/۳۲			

جدول ٦. ب: مقایسهٔ نگرش به ریاضیات در پیش آزمون و پس آزمون

روش آموزش		تعداد	میانگین	واریانس	انحراف معیار
تجسم محور	پیش تست نگرش	۲۷	۸۷/۲۲	٦٤/٤١	۸/۰۲
	پس تست نگرش	۲۷	۸۳/۵۲	۲٦۹/٤۹	١٦/٤۲
غیر تجسم محور	پیش تست نگرش	۲۷	۸۵/۷۰	۲۹/۷۵	۵/٤۵
	پس تست نگرش	۲۷	۸۱/۲٦	۱۷۷/۵۰	۱۳/۳۲

همان طور که در جداول(٦-آ) و (٦-ب) مشاهده می‌شود، میانگین نگرش دانش‌آموزان سال سوم راهنمایی در آموزش به روش تجسم محور (۸۳/۵۲) بیشتر از آموزش بدون تأکید بر تجسم (۸۱/۲٦) می باشد، ولی باتوجه به این که هر دو گروه در پیش آزمون نگرش تقریباً دارای میانگین برابر هستند(جدول٦-ب)، همچنین با توجه به مقدار همبستگی به دست آمده ۰/۲۹- که در سطح معنا داری ۰/۸۹ معنا داراست و نیز با توجه به درجه اطمینان ۹۵ درصد مـورد نظر ما در این تحقیق (۰/۰۵ =)، می توان چنین نتیجه گرفت که دانش‌آموزانی که با روش تجسم محور آموزش دیده‌اند نسبت به دانش‌آموزانی که بدون تأکید بر تجسم آموزش می بینند، دارای نگرش بهتری نسبت به ریاضیات هستند.

• **سؤال سوم.** آیا دانش آموز که به روش تجسم محور آموزش می‌بینند، نسبت به دانش‌آموزانی که بدون تأکید بر تجسم آموزش دیده‌اند، دارای قدرت بیشتری در تعمیم و حل مسئله‌های مربوط به الگوهای شکلی در جبر می‌باشند؟

برای آزمون این فرضیه، از آزمون t استیودنت مستقل استفاده شد. نتایج تحلیل این آزمون در جدول زیر آورده شده است.

جدول ۷. نتایج بررسی استفاده از تجسم در دانش‌آموزان سال سوم راهنمایی

روش آموزش	میانگین و انحراف استاندارد	اختلاف میانگین	مقدار t	سطح معنا داری	فراوانی افرادی که جملهٔ nام را یافتند
تجسم محور	۲/۳٤ ± ۵/۵٦	۰/٦۱	۱/۱۲	۰/۲۷	۸
غیر تجسم محور	۱/٦۸ ± ٤/۹٦				۵

همان طور که در جدول فوق مشاهده می شود، متوسط(میانگین) عملکرد حل مسئله جبری الگوهای شکلی دانش آموزان سال سوم راهنمایی، در آموزش به روش تجسم محور (۵/۵٦) بیشتر از آموزش بدون تأکید بر تجسم (٤/۹٦) می‌باشد. نکتهٔ قابل تأمل این است که در گروه کنترل، فراوانی دانش‌آموزانی که فرمول جملهٔ nام را به دست آوردند، نسبت به گروه کنترل بیشتر است. با این وجود با توجه به مقدار t به دست آمده (۱/۱۲) که در سطح معنا داری ۰/۲۷ معنا دار است و نیز با توجه به درجه اطمینان ۹۵ درصد مـورد نظر ما در این تحقیق (۰/۰۵ =)، فرضیه صفر ما تأیید شده و می‌توان چنین نتیجه گرفت که قدرت تعمیم و حل مسائل جبری دانش‌آموزانی که به روش تجسمی آموزش می‌بینند، نسبت به دانش آموزانی که بدون تأکید بر تجسم آموزش دیده‌اند، بیشتر نیست. از طرفی جدول۷ نشان می‌دهد دانش‌آموزانی که به روش تجسم محور آموزش دیده اند، بهتر می‌توانند فرمول جملهٔ nام الگوهای شکلی را تشخیص دهند. نکته مهم این که این دانش‌آموزان، نسبت به دانش‌آموزانی که بدون تأکید بر تجسم آموزش دیده بودند، بهتر می‌توانستند اجزای فرمول به دست آمده را توجیه کنند. پژوهش‌های ریورا (۲۰۰۷و ۲۰۱۱)، دونکان و سامسون (۲۰۰۷)، تأیید کنندهٔ این نتیجه است.

بحث و بررسی

باتوجه به تفسیرهایی که از نتایج به دست آمده صورت گرفت، مشاهده می گردد که در پیش آزمون تفاوت چندانی بین عملکرد حل مسئله ریاضی دانش‌آموزان و نگرش آنها نسبت به ریاضیات، در دو گروه آزمایش و کنترل، وجود ندارد و عملکرد دو گروه در پیش آزمون‌های متغیرهای وابسته یکسان و مشابه است. در پس آزمون نیز در فرضیهٔ اول و سوم تفاوت زیادی بین دو گروه وجود ندارد. گرچه در هر دو فرضیه آموزش با محوریت تجسم نسبت به آموزش بدون تأکید بر تجسم، برتری دارد، ولی از لحاظ آماری، این تفاوت محسوس نیست. با این وجود آموزش تجسم محور باعث تغییر در نگرش دانش‌آموزان نسبت به ریاضیات می‌گردد. در ادامه برخی از محدودیت‌ها و عوامل دخیل در رد بعضی از فرضیه‌های تحقیق بیان می‌شود:

– به کارگیری روش‌های تجسم محور در حل مسئله، دشوار تر از روش‌های غیر تجسمی است (نژاد صادقی ۱۳۷٦، بوربا ۲۰۰۵). بنابراین دانش‌آموزان هنگام حل مسئله رغبت کمتری برای استفاده از روش‌های تجسم محور، از خود نشان می‌دهند. دلیل این وضعیت به ماهیت روش‌های تجسم محور باز نمی‌گردد بلکه به عادت‌های فکری دانش‌آموزان که غالباً با روش‌های رفتارگرایانهٔ غیر تجسمی شکل گرفته است باز می گردد.

– تعدادی ازدانش آموزان بطور منظم و کامل، در کلاس حضور نیافتند.

– تحقیق فقط روی جمعیتی خاص انجام شده است. ممکن است با اجرای دوبارۀ پژوهش روی جامعه ای بزرگ‌تر، نتایج متفاوتی به دست آید.

– انجام تحقیقات کیفی و مطالعات موردی در این حوزه (مانند پژوهش‌های پرزمگ، ۲۰۰۸ ،۲۰۰۶، ۱۹۸۶)، با توجه به ماهیت فرا شناختی تفکر تجسمی، می‌تواند ابعاد وسیع‌تری را روشن سازد.

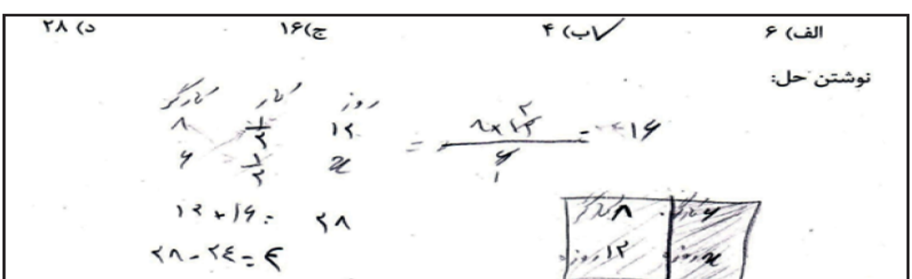
با وجود عدم تأیید فرضیۀ اول و سوم تحقیق، بررسی پاسخ دانش آموزان محققان را به نتایج جالبی رهنمون ساخت که توجه به آن ها می تواند تبیین دیگری از تدریس تجسم محور را ارائه نماید :

• یک رابطۀ قوی بین تصاویر ذهنی که معلمان در کلاس از آن استفاده می‌کنند و تصاویر ذهنی که دانش‌آموزان به کار می‌گیرند وجود دارد. بسیاری از دانش‌آموزان سعی کرده‌اند راه معلم را برای حل مسائل به کار گیرند. این موضوع خود از آموزش پذیریِ تفکر تجسمی حمایت می‌کند. به‌عنوان نمونه شکل(۲ –ب) پاسخ یکی از دانش‌آموزان را به سؤال اول (شکل ۲–آ) پس آزمون، نشان می‌دهد که قبلاً توسط معلم او به کار گرفته شده است.

۸کارگر کاری را ۲٤ روزه تمام می کنند. اگر پس از انجام نصف کار دو نفر آنها غایب شوند، کار با چند روز تأخیر انجام می شود؟

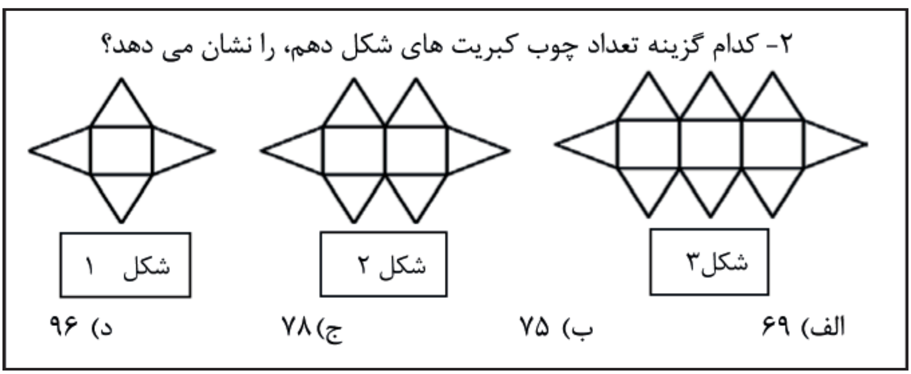
الف) ٦ ب) ٤ ج)١٦ د) ۲۸

(شکل ۲ –آ): سؤال ۱ پس آزمون

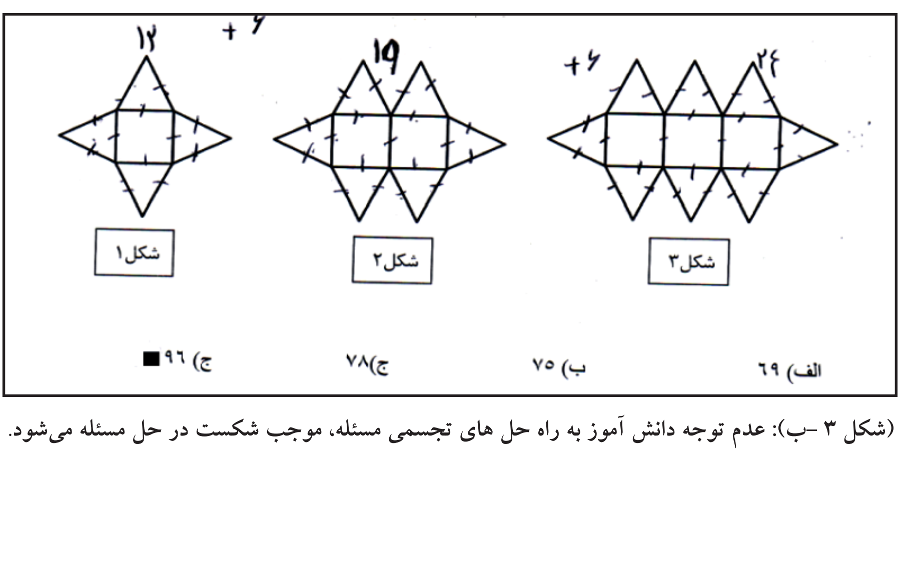


(شکل ۲–ب): پاسخ به یک سؤال ۱ پس آزمون با تأکید بر تجسم

• باید تعادلی مناسب، بین شیوهٔ تدریس تجسمی و غیر تجسمی بر قرار گردد، زیرا توجه بیش از حد به هر کدام از روش‌های تدریس ارائه شده، موجب بد فهمی دانش‌آموزان می‌گردد. از این رو پرزمگ (۱۹۸۶ و b۲۰۰۶) روش تلفیقی را، یعنی آموزشی که در آن هم از تفکر تجسمی استفاده می‌شود و هم زبان جبری ریاضیات در نظر گرفته می‌شود، پیشنهاد می‌نماید. در شکل (۳ –ب) به دلیل عدم توجه دانش‌آموز به راه حل‌های تجسمی مسئله، و با تکیه بر راه حل عددی از حل مسئله دوم پس آزمون (شکل ۳ –آ) باز مانده است. البته عکس این موضوع نیز مشاهده شده است، یعنی این‌که دانش‌آموز به خاطر تکیهٔ بیش از حد بر راه حل تجسمی خود نتوانسته است مسئلهٔ اول پس آزمون را حل نماید.



(شکل ۳ –آ): سؤال ۲ پس آزمون

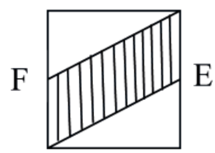


(شکل ۳ –ب): عدم توجه دانش آموز به راه حل های تجسمی مسئله، موجب شکست در حل مسئله می‌شود.

• تدریس به شیوهٔ تجسمی باعث درک شهودی و شناخت کل نگر از مفهوم می‌گردد. به‌علاوه آنها زمان کمتری را برای حل مسئله صرف می‌کنند. پاسخ یکی از دانش آموزان (شکل ٤ –ب) به مسئلهٔ ۳ پس آزمون (شکل ٤ –آ) این ادعا را نشان می‌دهد.

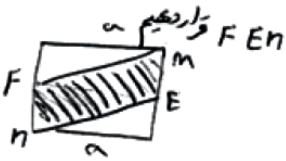
۳ - شکل مقابل مربعی به ضلع a را نشان می دهد. نقاط E و F وسط اضلاع قرار دارند. مساحت قسمت هاشور خورده چقدر است؟

الف) $\frac{a}{2}$ ب) $\frac{a^2}{4}$ ج) $\frac{a}{4}$ د) $\frac{a^2}{2}$



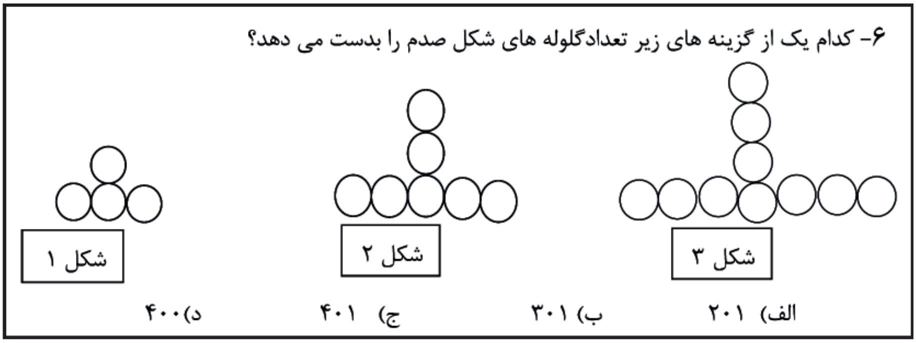
(شکل ٤–آ): سؤال ۳ پس آزمون

نوشتن حل: اگر مثلث FEm را زیر مثلث FEn قرار دهیم
قسمت مثلثی نصف مربع می شود

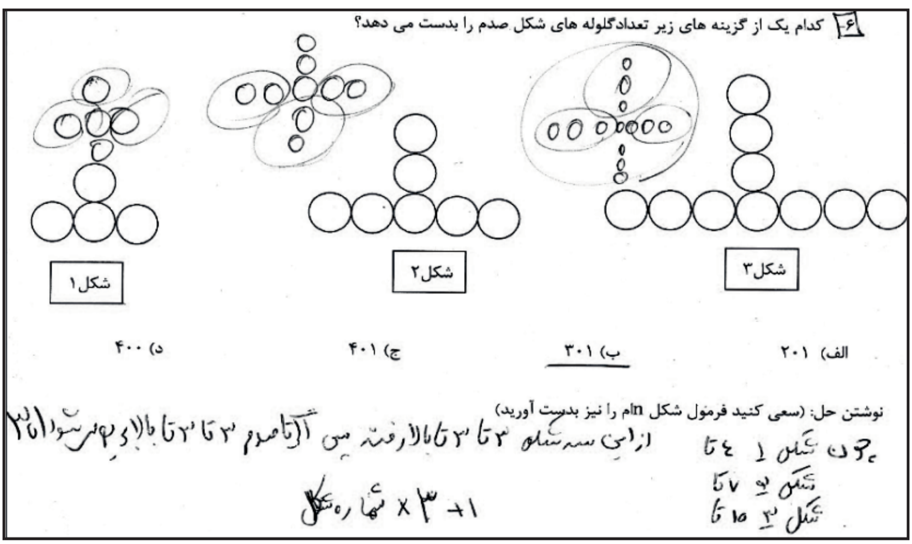


(شکل ٤–ب): استفاده از راه حل های تجسم محور زمان لازم برای حل مسئله را کاهش می دهد.

• گاهی تصویرهای ذهنی غلط، خود را بر حل کنندهٔ مسئله تحمیل می‌کنند. این موضوع موجب می‌گردد تا آن‌ها نتوانند، روی حل مسئلهٔ خود بازبینی متناوب داشته باشند و در نتیجه در حل مسئله با شکست مواجه می‌شوند. در شکل(۵ –ب) دانش‌آموز در ابتدا سعی نموده است که از راه حل‌های تجسمی، مسئلهٔ ششم پس آزمون (شکل ۵ –آ) را حل کند، اما به دلیل عدم بازبینی متناوب، مجبور به رها کردن راه حل تجسمی خود و روی آوردن به راه حل جبری شده است.



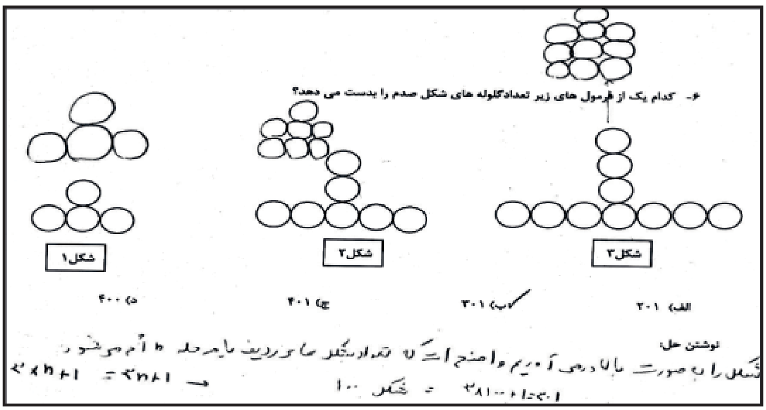
(شکل ۵ -آ): سؤال ٦ پس آزمون



(شکل ۵ –ب): : دانش آموز به علت عدم بازبینی، مجبور به رها ساختن راه حل تجسم محور خود شده است.

• نوشتن جملهٔ عمومی یک دنبالهٔ شکلی، برای دانش‌آموزان پایه سوم راهنمایی کار ساده‌ای نیست. متأسفانه در کتاب درسی آن‌ها، به یک مثال از دنباله‌های شکلی بسنده شده است. در این پژوهش دانش‌آموزان گروه کنترل وآزمایش آموزش‌های لازم را برای تشخیص جمله عمومی یک دنباله شکلی دیده‌اند و به کتاب درسی آن‌ها اکتفا نشده است. می‌توان گفت، دانش‌آموزانی که به روش تجسم محور آموزش می‌بینند، می‌توانند یک مسئله را از دیدگاه‌های متفاوت مورد بررسی قرار دهند و این موضوع ایجاد راه حل‌های متفاوت را در پی خواهد داشت. به‌علاوه آنها بسیار

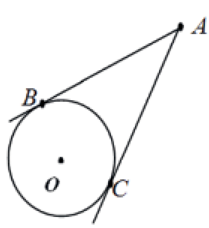
ساده تر می‌توانند روابط بین اجزای تشکیل دهندهٔ فرمول‌ها را تشخیص دهند. دانش‌آموزانی که به این روش آموزش دیدند بهتر توانستند، جملهٔ عمومی دنباله‌های شکلی را تشخیص دهند. در شکل ٦ برای حل سؤال ششم پس آزمون (شکل ۵ –آ) راه حلی متفاوت ارائه شده است، که در این پاسخ، تجسم دانش‌آموز او را به جمله عمومی درست راهنمایی می‌کند.



شکل٦: حل تجسمی مسئله‌ها، باعث دیدن یک مسئله از منظرهای متفاوت می‌شود.

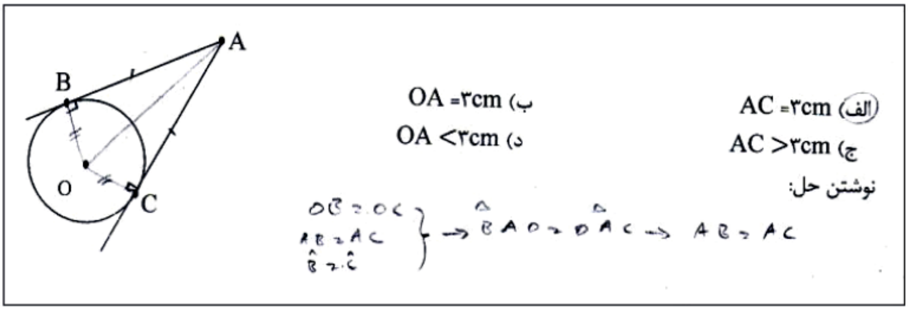
• دانش‌آموزانی که به روش تجسم محور آموزش می‌بینند، در استفاده از زبان رسمی ریاضیات با مشکلاتی روبه رو هستند. پاسخ دو نفر از دانش‌آموزان به سؤال ۹ پس آزمون (شکل ۷ –آ) در شکل (۷ –ب) و شکل (۷ –ج) آمده است. در شکل(۷ –ب) دانش‌آموز با اثبات دقیق به حل مسئله دست یافته است در حالی‌که دانش‌آموز دیگر (شکل ۷ –ج) نتوانسته راه حل مبتنی بر تجسم خود را به زبان نمادهای ریاضی بیان کند.

۹- در شکل روبه رو، از نقطه A دو مماس بر دایره، در نقاط B,C رسم می کنیم. اگر AB=۳cm کدام گزینه درست است؟

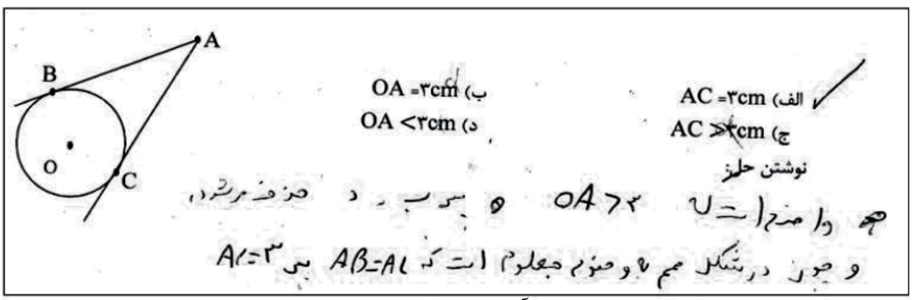


الف) AC =۳cm
ب) OA =۳cm
ج) AC >۳cm
د) OA< ۳cm

(شکل ۷–آ): سؤال ۹ پس‌آزمون



(شکل ۷-ب):تسلط بیشتر دانش آموزان بر استفاده از زبان رسمی ریاضیات در تدریس بدون تأکید بر تجسم



(شکل ۷-ج):تدریس تجسم محور دانش آموزان در استفاده ی از نماد های جبری تضعیف می‌کند.

پیشنهادهای کاربردی

تجزیه و تحلیل داده‌های آماری و پاسخ دانش‌آموزان به سؤالات، ایجاب می‌کند که در روش آموزش، به‌منظور پرورش دانش‌آموزانی مسئله حل کن تغییراتی به‌وجود آید. آنچه در ادامه می‌آید پیشنهادهایی کاربردی در این زمینه است:

• **تغییر در روش تدریس معلمان:** حرکت اصلاحی۱۹۹۰ بر حل مسئله و حواس تأکید دارد و حل یک مسئله نیازمند تشکیل و ارتباط تصاویر آن مسئله در ذهن است (ویتلی و گری سون ۱۹۹۷). از آنجا که بسیاری از دانش‌آموزان چرایی بسیاری از عملکردهای معلمان را درک نمی‌کنند و خود را با حفظ مطالب قانع می‌سازند، باید گفت که توجه مناسب بر رویکرد تجسمی می‌تواند این مشکل را مرتفع سازد. البته نمی‌توان گفت که رویکرد مبتنی بر تجسم می تواند از تدریس غیرتجسمی پیشی بگیرد، بلکه می‌توان نتیجه گرفت که روش تدریس باید به‌گونه‌ای باشد که هم شامل رویکردهای تجسمی و هم شامل رویکردهای غیرتجسمی باشد. افراط و یا تفریط از هر طرف، موجبات نقص در درک دانش‌آموزان را فراهم خواهد نمود. همچنین باید

توجه داشت که دانش آموزانی که با رویکرد تجسمی آموزش می بینند دارای نگرش بهتری نسبت به ریاضیات هستند.

• **توجه بیشتر معلمان و برنامه ریزان آموزشی به بحث تعمیم در الگوهای شکلی**: مسائل مربوط به الگوهای شکلی باعث ایجاد تصویرهای ذهنی متفاوت در فهم ارتباط بین متغیرهای جملهٔ عمومی شکل n ام می‌گردد که نتیجهٔ آن افزایش توانایی تجسم و درک بیشتر متغیرهای جبری است. معلمان با تدوین مباحثی مانند الگویابی روابط جبری در اشکال می‌توانند از تجرد موضوعات جبری بکاهند و مسائل آن را قابل فهم‌تر نمایند .

• **استفاده از توانایی فضایی دانش آموزان**: همه دانش آموزان از این قدرت تاحدی برخوردارند (بیشاب، ۱۹۸۳). اما با توجه به این‌که در مدارس ما نسبت به این توانایی، اهمیت کمی داده می شود موجبات تضعیف آن فراهم شده است. استفاده از مسائلی که کاملاً شهودی و هندسی است ولی برای حل آنها نیازی به استفاده از زبان رسمی ریاضی نیست، می‌تواند ما را در رسیدن به این مهم یاری رساند. البته مسائل مرتبط در قسمت بازی و ریاضی کتاب ریاضیات سوم راهنمایی آمده است که بیشتر معلمان با عبور از آنها، باعث تضعیف اهمیت آن می شوند.

• **پرورش مهارت‌های نمودارخوانی، ترسیم و تجزیه و تحلیل شکل‌ها**: عدم توانایی دانش‌آموزان در ترسیم، مهارت‌های جدول خوانی و تفسیر نمودارها باعث شده که در بسیاری از مواقع از دست یابی به جواب‌های صحیح بازمانند. بنابراین توجه بیشتر معلمان به این موضوع می‌تواند باعث پیشرفت عملکرد حل مسئله در دانش‌آموزان گردد.

• **استفاده از روش‌های تجسمی و غیرتجسمی برای حل مسائل**: توجه بیش از حد به رویکرد غیرتجسمی در حل مسائل باعث تضعیف انعطاف پذیری ریاضیات می شود و توجه بیش از حد به رویکرد تجسمی باعث قطع ارتباط با زبان رسمی ریاضیات می‌گردد. بنابراین معلمان باید سعی کنند هر دو روش را برای حل مسائل مورد توجه قرار دهند. آنها باید سؤالاتی را تدوین نمایند که بتوان به هر دو صورت در مورد آنها فکر نمود. تعمیم به صورت تجسمی باعث ایجاد فرمول‌های مختلف می‌شود که خود باعث بسط معانی فرمول‌ها و عبارت‌های معادل می‌گردد (ریورا، ۲۰۱۱ و۲۰۰۷).

• **مطلق نکردن تجسم محوری**: معلمان باید به دانش‌آموزان، در جهت کنترل تجسم خود، یاری رسانند و به آنها گوشزد کنند که تجسم بی‌مورد می‌تواند مانع تفکر ثمربخش گردد (اسپینوال و شاو ۲۰۰۲). به عبارت دیگر «رویکرد تدریس مبتنی بر تجسم نوشداروی جهانی نیست» (پرزمگ ۱۹۸۶). پژوهش‌ها (شونفیلد۱۹۸۷، گارفالو و لستر۱۹۸۵، نقل شده از NCTM، ۲۰۰۰)

مشخص می‌کنند که شکست‌ها یا عدم موفقیت‌های حل مسئلهٔ دانش‌آموزان مربوط به فقدان دانش ریاضی آنها نیست بلکه به استفاده نامؤثر از آنچه که به کار می‌گیرند بستگی دارد.

• **عینی کردن ریاضیات**: ریاضیاتی که بدون پیوند با زندگی واقعی و بدون استفاده از زمینه‌های مناسب تدریس می‌شود، فرصت انتقال تصویرهای ذهنی واقعی را از یادگیرنده سلب می‌کند، در نتیجه باور دانش‌آموزان را نسبت به خود، متزلزل می‌گرداند و آن را دست نیافتنی، غیرواقعی و نامفهوم نشان می‌دهد. توجه به جنبه‌های تجسمی موضوعات ریاضی، می‌توان پیوندی طبیعی بین ریاضیات و تفکر معمولی هر فرد ایجاد نمود.

سرانجام این‌که، برای ادامه پژوهش در این حوزه و به منظور رفتن به لایه‌های ظریف تر و دقیق‌تر نقش تجسم در یادگیری ریاضی لازم است (و این پیشنهاد می‌شود که) پژوهش‌های آینده بر محور پژوهش‌های کیفی، از جمله تحقیق در عمل[۴۳] صورت پذیرد.

منابع

ادوارد ا. اسمیت. (۲۰۰۳). *زمینه روانشناسی هیلگارد و اتکینسون.* (محمود بهزاد و محمود ساعتچی، مترجمان۱۳۸٦). تهران: انتشارات گپ.

ریحانی، ابراهیم. (۱۳۸٤). معرفی نظریه پیاژه و نظریه فن هیلی- فن هیلی در مورد یادگیری هندسه. *رشد آموزش ریاضی*،۲۲ (۸۰)، ۲۲-۱۲.

شریفی، حسن پاشا. (۱۳۷۲). *اصول روان سنجی و روان آزمایی*. انتشارات رشد. تهران.

غلام آزاد، سهیلا. (۱۳۷۹). رویکردهای نوین در آموزش هندسه. *رشد آموزش ریاضی*، (٦۰و۵۹)، ۲۵-۱۸.

کیامنش، علیرضا. (۱۳۷۹). *سنجش و اندازه گیری در ریاضی، همراه با سؤالات ریاضیTIMSS* . تهران.: انتشارات پژوهشکده تعلیم و تربیت وزارت آموزش و پرورش.

نژادصادقی، نورالله. (۱۳۷٦). مشاهده، تجسم و نقش آن در آموزش و یادگیری ریاضیات. *رشد آموزش ریاضی*، (٤۹) ۲٤-۲۰.

Aspinwall, L.,& Shaw Kenneth, L. (2002). *When Visualization is a Barrier to Mathematical Understanding. The Mathematics Teacher. Reston*,95(9), 714.

Bishop, A. J. (1983). Spatial Abilities and Mathematical thinking. In Zweng, M. et al. (eds.) *Proceedings at the IV I.C.M.E.*(PP 176-178). Boston, USA: Birhauser.

Borba, M. C. & Villarreal, M. E. (2005). *Humans-with-media and the reorganization of mathematical thinking: information and communication technologies, modeling, visualization,* *and experimentation*. New York: Springer Science.

Cabral, B. (2004). *The Van hiele's model and cognitive visualization in learning geometry at secondary school*. (Thesis for the degree of Master of Arts in teaching, The University of Texas).

Eraso¸ M. (2007). *Connecting visual and analytic reasoning to improve Students' spatial visualization abilities: A constructivist approach*. (A dissertation submitted in partial fulfillment of requirements for the degree of Doctor of Philosophy in curriculum and instruction, Miami, Florida).

Giaquinto, M. (2005). *Visual thinking in mathematics*. Oxford: University Press.

Gutierrez, A. (1996). Visualization in 3-dimensional geometry: In search of a framework, *Proceedings of the 20th PME Conference 1,* 3-19.

Gilbert, J., Reiner, M.,& Nakhleh, M (2007). *Visualization: Theory and practices in science education*. New York, NY: Springer.

Hitt F., Gonzalez A. & Morasse C (2008). *Visualization and students' functional representations in the construction of mathematical concepts. An example: The concept of co-variation as a prelude to the concept of function.* In 11 th International Congress on Mathematics Education (ICME-11), Topic Study Group 20 (TSG 20), Visualization in the Teaching and Learning of Mathematics, July 6-13, 2008, Monterrey, N. L., Mexico.

Hvizdo, M. (1992). *A study of the effect of spatial ability on geometry grades*. (Thesis for the degree of master of sciences, Southern Connecticut State University).

Lajinian, A. (2008). *The effect of visually enhanced instructional units on high school calculus student visualization ability and their understanding of The Limit concept*. (A dissertation of the requirements for the degree of Ed.D. In mathematics pedagogy. Montclair state University).

Lean, G., & Clements, M. A. (1981). Spatial ability, visual imagery, and mathematical performance. *Educational Studies in Mathematics, 12*(3), 267-299.

Les, Z.,& Les, M. (2008). *Shape understanding system.* The First Steps toward the Visual Thinking Machines. New York, NY: Springer.

Lima, R. N. de. & Tall, D. O. (2008). Procedural embodiment and magic in linear equations. *Educational Studies in Mathematics*, *67*(1), 3-18.

Mancosu, P.; Jørgensen, Klaus Frovin; Pedersen, S.A. (Eds.) (2005). *Visualization, Explanation and Reasoning styles in mathematics*. New York, NY: Springer.

Presmeg, N. C. (1986). Visualization in high school mathematics. *For the Learning of*

Mathematics, 6(3), 42-46.

Presmeg, N. C. (2006a). A semiotic view of the role of imagery and inscriptions in mathematics teaching and learning. Plenary Paper. In J. Navotna, H. Moraova, M. Kratna, & N. Stehlikova (Eds.), *Proceedings of the 30th Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* Vol. 1, (pp. 19-34).

Presmeg, N. C. (2006b). Research on visualization in learning and teaching mathematics: Emergence from psychology. In A. Gutiérrez and P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education* (pp.205-235). Dordrecht:Sense Publishers.

Presmeg, N. C. (2008a). *Spatial abilities research as a foundation for visualization in teaching and learning mathematics.* In N. C. Presmeg & P. C. Clarkson (Eds.), Critical issues in mathematics education: Major contributions of Alan Bishop (pp. 83-95). New York, NY: Springer.

Presmeg, N.C (2008b). *An overarching theory for research in visualization in mathematics education*. In 11 th International Congress on Mathematics Education (ICME-11), Topic Study Group 20 (TSG 20), Visualization in the Teaching and Learning of Mathematics, July 6-13, 2008, Monterrey, N. L., Mexico.

Principles and Standards for School Mathematics (2000). National Council of Teachers of Mathematics.

Rivera, F. D. (2007). Visualizing as a mathematical way of knowing: Understanding figural generalization. *Mathematics Teacher, 101*(1), 69-75.

Rivera, F. D. (2011). *Toward a visually-oriented school mathematics curriculum. Research, Theory, Practice, and Issues.* (Mathematics Education Library Volume 49). Dordrecht, Netherlands: Springer.

Sobanski, J. (2002). Visual math: See how math makes sense (2nd ed.).New York. NY: Learning Express.

Straber, R., & Kadunz, G. (2004). Image- metaphor- diagram: Visualization in learning\ mathematics. *Proceeding of the 28 th conference of the international group for the psychology of mathematics education (PME)*(Vol, 4)(pp, 241-248).

Samson, D. (2007). Patterns of visualisation. *Learning and Teaching Mathematics, 5*, 4-9.

Texas Assessment of Knowledge and Skills (TAKS) Grade8. (2006) Texas Education Agency. Student assessment division.

Texas Assessment of Knowledge and Skills (TAKS) Grade۹. (2006) Texas Education Agency. Student assessment division.

TIMSS. (2003). *Released set eighth grade. International association for the evaluation of educational achievement* (IEA).

Weckbacher, L. M (2007). *The role of visualization in geometric problem solving*.(A dissertation of the requirements for the doctor of philosophy in education. University of California).

Wheatley, G. H. (1997). Reasoning with images in mathematical activity. in L. D. English (ed.), *Mathematical Reasoning: analogies, metaphors, and images*(pp. 281-97), Mahwah NJ: Erlbaum.

Woolner, P. (2004). A comparison of visual-spatial approach and a verbal approach to teaching mathematics. *Proceeding of the 28th PME*. (Vole, 4)(pp, 449-456)

زیرنویس

1. Visual
2. Representation
3. Fink
4. Smith
5. Principles and standards for school mathematics
6. Albert Einstein
7. Hadmar
8. Fenema
9. Hvizdo
10. Spatial thinking
11. Woolner
12. Verbal teaching
13. Bishop
14. Presmeg
15. Ferdinand Rivera
16. Trends in International Mathematics and Science Study (TIMSS)
17. Krutetskii
18. Wheatley
19. Aspinwall and Shaw
20. Weckbacher
21. Lean and Clements
22. Fennema and tartre
23. pictures – in - mind
24. Battista
25. Gutierrez
26. Cabral
27. Pierre Marie van hiele
28. Visual level
29. Descriptive/Analytic
30. Abstraction/ Relation
31. Formal Deduction Level
32. Rigor
33. De Lima and Tall
34. Lajinian
35. Samson
36. Visual and non visual methods of solution of mathematical problems
37. Texas Assessment of knowledge and skill
38. Coefficient alpha (Cronbach)
39. Kolmogrov-Smirnov
40. Action Research