بررسی و تحلیل مدل‌های اساسی استدلال و اثبات در آموزش ریاضی[1]

■ ابراهیم ریحانی*
■ فهیمه کلاهدوز**

چکیده:

هدف این مطالعه، بررسی و تحلیل مدل‌ها و چارچوب‌های عمده‌ای است که محققان و آموزشگران ریاضی برای بررسی پاسخ‌های افراد به مسائل مرتبط با اثبات در ریاضیات پیشنهاد داده‌اند. در این پژوهش ۸ مدل، از جمله مدل‌های محققانی همچون هارل و ساودر، رکیو و گودینو، میازاکی، بالاچف، معرفی و مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفته است. هر مدل به نوعی، روش استدلال و اثبات پاسخ‌دهندگان را طبقه‌بندی می‌کند. بر اساس توضیحاتی که محققان برای طبقات مختلف مدل‌های خود بیان می‌نمایند، جدولی ارائه می‌گردد که در آن، همپوشانی و تمایز بین این طبقات نشان داده می‌شود. نتایج بررسی و تحلیل مدل‌ها نشان می‌دهد که طبقه‌بندی پاسخ افراد به مسائل مرتبط با اثبات، می‌تواند به دو صورت زیر انجام پذیرد؛

۱. بدون توجه به دیدگاه افراد نسبت به اثبات و صرفاً براساس روش استدلال آنها؛

۲. با توجه به نوع تفکر افراد در فرایند اثبات و همچنین روش استدلال آنها در ارائه‌ی اثبات.

در این پژوهش با استفاده از مدل‌های مورد مطالعه، چارچوب جدیدی ارائه گردیده است؛ به گونه‌ای که می‌توان استدلال‌های مختلف ریاضی را در آن طبقه‌بندی نمود. در این چارچوب، استدلال‌های افراد در فرایند اثبات یک گزاره، از نظر روش و شکل ارائهٔ آنها دسته بندی می‌شوند که با استفاده از آن، می‌توان علاوه بر ارزیابی توانایی دانش‌آموزان در فرایند اثبات، روش تفکر و دیدگاه آنها را نیز نسبت به این فرایند، مورد بررسی قرار داد. به نظر می‌رسد که این چارچوب، تا حدود زیادی می‌تواند طبقات مختلف مدل‌های ارائه شده توسط محققان دیگر را در برگیرد.

کلید واژه‌ها: **مدل‌های اثبات، سطوح اثبات، روش‌های استدلال، دانش‌آموزان، آموزش ریاضی.**

تاریخ دریافت مقاله: ۹۱/۵/۱۴ تاریخ شروع بررسی: ۹۱/۹/۱۲ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۲/۲/۲۱

* استادیار گروه ریاضی دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی................ e_reyhani@srttu.edu
** دانشجوی کارشناسی ارشد آموزش ریاضی دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی و دبیر ریاضی شهرستان دهاقان...... math65fa@yahoo.com

۱. مقدمه

استدلال[۲] و اثبات[۳]، از مهارت‌هایی هستند که به طور کلی در زندگی روزمره و به طورخاص در آموزش ریاضی از جایگاه خاصی برخوردارند. آشنایی فرد با این دو فرایند در ریاضیات و توانایی به کارگیری آن‌ها می‌تواند زمینه‌ساز تفکر منطقی او باشد. قضاوت در مورد درستی یک استدلال، قضیه یا گزاره‌ای در ریاضیات، از فرایندی به نام اثبات «نشأت» می‌گیرد. بسیاری از محققین آموزش ریاضی بر این باورند که فرایند استدلال و اثبات برای شناخت و انجام فعالیت‌های ریاضی و توسعهٔ تفکر منطقی ضروری و یکی از ابزارهای مهم در آموزش و یادگیری ریاضیات می‌باشد (NCTM[۴]، ۲۰۰۰؛ هارل[5] و ساودر[۶]، ۲۰۰۷؛ استایلیانیدز[۷] و استایلیانیدز، ۲۰۰۸؛ هنا[۸] و باربیو[۹]، ۲۰۰۸؛ یان‌کلویتز[۱۰]، ۲۰۰۹؛ کاگچه[۱۱]، آیدین[۱۲] و ییلدیز[۱۳]، ۲۰۱۰). ممکن است برای یک ریاضیدان با تجربه، پاسخ به این سؤال که " یک اثبات ریاضی چیست؟ " تا اندازه‌ای سرراست و آسان باشد. به عنوان مثال، از نظر بسیاری از ریاضیدانان و آموزشگران ریاضی (گریفیتس[۱۴]، ۲۰۰۰؛ وبر[۱۵]، ۲۰۰۵؛ بایازیت[۱۶]، ۲۰۰۹) اثبات ریاضی، دنباله‌ای منطقی از استدلال‌هایی است که با یک مجموعه از داده‌های معین و مشخص (مانند اصول موضوعه، تعاریف، مفروضات و نتایج ثابت شده‌ی قبلی) شروع می‌شود و با استفاده از مراحل منطقی به یک نتیجهٔ معتبر می‌رسد؛ اما استفاده از این تعریف می‌تواند برای یک دانش‌آموز که نوشتن اثبات را شروع کرده است، مبهم و ناآشنا باشد و سؤالاتی را برای او مطرح کند؛ از جمله اینکه چگونه تشخیص دهیم کدام اصول موضوعه باید برای شروع اثبات به کار برده شود؟ یا چگونه مراحل منطقی مورد نیاز مشخص می‌شود؟ و سؤالاتی از این قبیل.

علاوه بر ریاضی‌دانان، بسیاری از نظریه‌پردازان نیز، از دیدگاه آموزشی و معرفت‌شناختی، در پی یافتن پاسخ به این پرسش بوده‌اند که ماهیت اثبات ریاضی چیست؟ که باید گفت جواب نهایی و منحصربه‌فردی برای این پرسش وجود ندارد، بلکه در شاخه‌های مختلف ریاضی و با توجه به جوامع مورد نظر می‌توان تعاریفی با شرایط و ملاک‌های متفاوت برای اثبات ارائه کرد. از نظر هارل و ساودر (۲۰۰۷) در پاسخ به این سؤال باید به چند فاکتور مهم توجه نمود. اول اینکه ساختِ یک دانش جدید در خلاء رخ نمی‌دهد، بلکه از طریق دانش موجود شکل می‌گیرد و چیزی که فرد در حال حاضر می‌داند، اساس آنچه را که در آینده خواهد دانست، تشکیل می‌دهد. دوم اینکه فرد باید درستی مفهوم اثبات را همان‌گونه که در طول تاریخ ریاضیات فهمیده شده و با آن کار شده است، در نظر بگیرد. سوم اینکه به دلیل وابسته بودن مفهوم اثبات به شرایط و ملاک‌های جامعهٔ مورد نظر، شخص باید ماهیت اجتماعی اثبات را بشناسد. به‌عبارت دیگر، آنچه به‌عنوان یک استدلال متقاعد کننده توسط یک شخص ارائه می‌شود باید توسط دیگران نیز پذیرفته شود. بنابراین مشاهده می‌شود که اثبات، یک فعالیت پیچیدهٔ ریاضی است که بررسی ماهیت و تعریف آن، به عوامل زیادی از جمله عوامل شناختی، ریاضی، تاریخی، معرفت‌شناختی و اجتماعی بستگی دارد (وبر، ۲۰۰۵؛ هارل و ساودر، ۲۰۰۷).

اثبات یک گزاره توسط ریاضیدانان، معلمان و یادگیرندگان می‌تواند شکل‌های مختلفی به خود بگیرد که هر یک از این شکل‌ها ممکن است «هدف»‌های خاصی را مورد توجه قرار دهد. بالاچف (۲۰۱۰) معتقد است که این اهداف شامل بررسی قطعیت[۱۷]، ایجاد درک و فهم و همچنین نیاز به یک ارتباط موفقیت آمیز می‌باشد. او بیان می‌دارد که ماهیت پیچیدهٔ اثبات ریاضی بر این واقعیت استوار است که هر گونه تلاش برای ایجاد یک اثبات براساس هر یک از این سه هدف، می‌تواند ارزش و اعتبار دو هدف دیگر را تغییر دهد. به عنوان مثال، بالاچف (۲۰۱۰) بیان می‌دارد که نگاه به اثبات از جنبهٔ قطعیت، برای انتقال ایده‌ها و مفاهیم منطقی ریاضی وجهی الزامی است. اما چنین دیدگاهی صرفاً برای یادگیری و آموزش اثبات، قابل قبول نخواهد بود؛ به خصوص وقتی که دانش‌آموزان برای اولین بار با اثبات ریاضی روبه‌رو می‌شوند و ساختار کنترلی[۱۸] آنها هنوز کامل و آماده نیست. در اغلب موارد، پذیرش یک استدلال منطقی به‌عنوان یک اثبات، هرچند هم که معتبر باشد به تجربه و دقت فرد اثبات کننده و مخاطب او بستگی دارد. در واقع پذیرش یک اثبات و تعیین اعتبار آن، فرایندی اجتماعی است و وابسته به ملاک‌های مورد پذیرش و قابل قبول افراد جامعهٔ موردنظر می‌باشد (میولر[۱۹]، ۲۰۰۷؛ کادوالادرولسکر[۲۰]، ۲۰۰۷). یکی از مباحثی که در تحقیقات مرتبط با آموزش ریاضی مورد بررسی قرار گرفته است، توانایی دانش‌آموزان و دانشجویان در زمینهٔ استدلال و اثبات است (به‌عنوان مثال، هارل و ساودر، ۱۹۹۸؛ میازاکی[۲۱]، ۲۰۰۰؛ هیلی[۲۲] و هویلز[۲۳]، ۲۰۰۰ ؛ استایلیانیدز، ۲۰۰۵، ۲۰۰۷ ؛ چین[۲۴] و لین[۲۵]، ۲۰۰۹؛ راموس[۲۶] و اینگلیس[۲۷]، ۲۰۱۱).

بررسی مهارت‌ها و توانایی‌های دانش‌آموزان در زمینهٔ اثبات ریاضی کار ساده‌ای نیست؛ زیرا همان‌گونه که بیان گردید، به طور کلی این فرایند، تحت تأثیر رویکردهای آموزشی، فرهنگی، اجتماعی و تاریخی است (هارل و ساودر،۲۰۰۷) و به طور خاص، فرایندی است که شامل مجموعه‌ای از دانش، باورها، شایستگی‌ها و توانایی‌های دانش‌آموزان در استدلال‌های منطقی و تشخیص فرضیه‌ها و ساختارهای منطقی می‌باشد (وارجیس[۲۸]، ۲۰۰۷). با این وجود، بررسی دیدگاه فراگیران در مورد اثبات و آگاهی از توانایی و نوع مهارت آنها در این زمینه، می‌تواند بر تصمیم‌گیری معلمان، آموزشگران و برنامه‌ریزان درسی در روند آموزش دانش‌آموزان و دانشجویان مؤثر باشد. شونفلد (۱۹۹۴) معتقد است که «اثبات یکی از بیشترین موارد بدفهمی را در برنامهٔ درسی ریاضیات دارد و ما واقعاً نیاز داریم که آن‌را طبقه‌بندی کنیم» (ص۲۵).

هدف این مطالعه که به روش توصیفی ـ تحلیلی صورت گرفته است، بررسی مدل‌ها و چارچوب‌هایی است که محققان و آموزشگران ریاضی برای دسته‌بندی و بررسی پاسخ فراگیران به مسائل مرتبط با اثبات پیشنهاد داده‌اند. قابل توجه است که هر یک از این دسته‌بندی‌ها به نوعی روش کار دانش‌آموزان یا دانشجویان را در فرایند اثبات مشخص می‌کند و حتی در برخی موارد این روش‌ها می‌توانند نوع تفکر و دیدگاه فراگیران را نیز نسبت به فرایند اثبات مشخص نمایند. همچنین در این مطالعه، بر مبنای تحلیل مدل‌های موجود، چارچوبی توسط مؤلفان مقاله پیشنهاد می‌گردد که به کمک

آن و بر اساس روش و شکل استدلال‌ها تا حدودی می‌توان علاوه بر مطالعهٔ توانایی دانش‌آموزان در فرایند اثبات، روش تفکر و دیدگاه آنها را نیز نسبت به این فرایند، مورد بررسی قرار داد.

۲. معرفی و بررسی مدل‌های اساسی اثبات در آموزش ریاضی

به‌نظر می‌رسد یکی از دلایل عمدهٔ مشکلات دانش‌آموزان در درک و فهم اثبات و بیان آن، این است که برخی از معلمان آنچه را که از نگاه دانش‌آموزان به عنوان دلیل و مدرک برای اثبات یک گزاره در نظر گرفته می‌شود، مورد توجه قرار نمی‌دهند و به جای اینکه به تدریج فهم آنها را در زمینهٔ اثبات و ارائهٔ استدلال‌های معتبر تصحیح کنند، روش‌های اثبات و قوانین تلویحی را به آنان تحمیل می‌کنند. توجه به این نکته ضروری است که در بسیاری از مواقع این قوانین با آنچه که دانش‌آموزان را، به ویژه در دوره‌های مقدماتی، متقاعد می‌کند، نامتناسب و ناهماهنگ است. به عنوان مثال، برخی از معلمان تمایل دارند که اثبات یک گزارهٔ ریاضی را تنها به شکل رسمی و نمادین ارائه دهند، در حالی که دانش‌آموزان تازه‌کار این روش را به خوبی درک نمی‌کنند. به طور کلی دانستن اینکه چه چیزی تفکر دانش‌آموزان را در مورد اثبات هدایت می‌کند، برای معلمان و برنامه‌ریزان درسی امری ضروری است (هارل و ساودر، ۱۹۹۸). یکی از روش‌های آشنایی با نوع تفکر فراگیران در این زمینه، بررسی و طبقه‌بندی سطوح تفکر و مهارت آنها در فرایند اثبات ریاضی می‌باشد. این دسته‌بندی می‌تواند منجر به شکل‌گیری یک چارچوب و مدل آموزشی شود؛ به گونه‌ای که ابزاری مناسب برای آموزشگران و معلمان به منظور شناخت نوع تفکر فراگیران و توانایی آن‌ها در فرایند اثبات باشد.

مدل‌هایی که در این قسمت تشریح می‌شوند و در ادامه مورد بررسی و تحلیل قرار می‌گیرند، درواقع چارچوب‌هایی هستند که محققانی همچون بالاچف (۱۹۸۸)، میازاکی (۲۰۰۰)، هارل و ساودر (۱۹۹۸،۲۰۰۷)، وبر (۲۰۰۴،۲۰۰۵)، رکیو[29] و گودینو[30] (۲۰۰۱) و دیگران، در ارتباط با پاسخ‌های دانش‌آموزان یا دانشجویان به مسائل مرتبط با اثبات‌های ریاضی، پیشنهاد داده‌اند. به‌نظر می‌رسد که برخی از این مدل‌ها از اهمیت بیشتری برخوردارند که در مورد آنها توضیح بیشتری ارائه خواهیم داد.

۲.۱. سطوح اثبات[31] در مدل بالاچف (۱۹۸۸)

بالاچف (۱۹۸۸) در مطالعهٔ خود، سطح اثبات دانش‌آموزان دورهٔ متوسطه را مورد توجه قرار می‌دهد و فرایندی را که دانش‌آموزان در انجام یک اثبات برای رسیدن به نتیجهٔ کلی طی می‌کنند، به دقت بررسی می‌کند. وی در مطالعهٔ خود، دانش‌آموزان را تشویق می‌کند تا به طور گروهی روی یافتن راه‌حل این مسأله کار کنند:«روشی برای پیدا کردن تعداد قطرهای یک چند ضلعی که تعداد رئوس آنرا می دانیم، پیدا کنید». بالاچف پس از تحلیل نتایج، پاسخ‌های دانش‌آموزان را در چهار دستهٔ مختلف طبقه‌بندی می‌نماید و معتقد است که این دسته‌ها چهار سطح پیچیدهٔ تفکر دانش‌آموزان را نشان می‌دهند. وی این دسته‌ها را

بدین‌صورت نامگذاری کرده است::

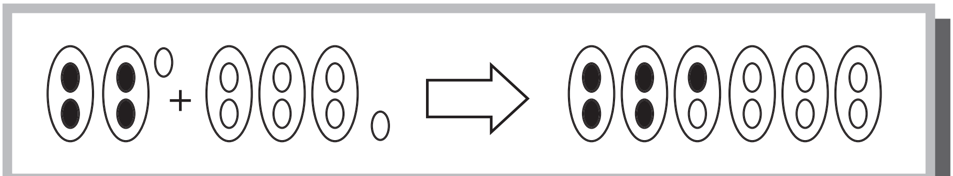
۱. **تجربه‌گرایی ساده[۳۲] (غیر دقیق)**: به نظر بالاچف، این سطح از اثبات، به معنای تأیید یک گزاره از طریق بررسی تعدادی از مثال‌ها است که به طور تصادفی انتخاب شده‌اند. به عنوان مثال، او در تحقیق خود نشان می‌دهد که برخی از دانش‌آموزان برای پاسخ به سؤال مطرح شده یک مربع، یک شش ضلعی و یک هشت ضلعی را بررسی می‌کنند و سپس به این نتیجه می‌رسند که تعداد قطرهای یک چند ضلعی را می‌توان با توجه به تعداد رئوس آن بیان نمود. در واقع آن‌ها با چند مثال خاص به یک نتیجهٔ کلی دست می‌یابند.

۲. **آزمایش تعیین‌کننده[۳۳]**: این سطح شامل تأیید یک گزاره بر اساس بررسی یک مثال خاص می‌باشد که با دقت و به‌عنوان یک نمونهٔ پرمایه انتخاب شده است. به‌عنوان مثال، در تحقیق بالاچف، برخی از دانش‌آموزان یک چند ضلعی پانزده رأسی را انتخاب کرده‌اند و بر این باورند که ادعای بیان شده با این مثال خاص ثابت می‌شود و می‌توان یک قانون کلی بیان نمود. به عبارت دیگر در این سطح، دانش آموز گزاره را از طریق یک مثال که با دقت انتخاب شده و دارای ویژگی خاصی است بررسی می‌کند.

البته همان‌گونه که وارجیس (۲۰۰۷) نیز بیان می‌کند تمایز بین دو سطح اول و دوم در مدل بالاچف تا حدودی مشکل است به ویژه اگر تنها محصول نهایی اثبات دانش‌آموز را مشاهده نماییم؛ البته مثال انتخاب شده در سطح دوم، نسبت به مثال سطح اول از پیچیدگی بیشتری برخوردار است.

۳. **مثال نوعی[۳۴]**: در این سطح، دانش‌آموز مثالی را انتخاب می‌کند که تعمیمی از یک دسته است و تمام ویژگی‌های آن دسته را دارد. سپس عملیات و تبدیل‌هایی را روی آن مثال انجام می‌دهد تا بتواند برای تأیید ادعا به یک توجیه برسد، سپس این عملیات و تبدیل‌ها را به کل دسته تعمیم می‌دهد. در اینجا با بیان مثالی دیگر سعی می‌کنیم ایدهٔ بالاچف را به خوبی تشریح کنیم.

برای اثبات گزارهٔ «جمع دو عدد فرد، عددی زوج می‌شود»، اثبات نمایش داده شده در شکل ۱، می‌تواند در این دسته قرار گیرد. اگر توجه کنیم، می‌بینیم که یک دسته‌بندی در شکل ۱، برای دو عدد فرد و سپس عدد زوج، انجام گرفته است که این دسته‌بندی را می‌توان برای تمام اعداد فرد و زوج انجام داد. بدین‌صورت دانش‌آموز نتیجه‌ای را که از مثال نوعی (شکل ۱) گرفته می‌شود به یک مجموعهٔ بزرگتر تعمیم می‌دهد.



شکل ۱ نمونه ای از اثبات در سطح مثال نوعی

۴. آزمایش (تجربه) فکری[۳۵]: در این سطح، دانش‌آموزان قادرند که از مثال‌ها، تصاویر و کارهای تجربی و عملی فاصله بگیرند و باتوجه به ویژگی‌های یک موقعیت و روابط بین آن ویژگی‌ها، با استفاده از استنتاج منطقی، توجیهی برای تأیید یک گزاره ارائه دهند. در واقع در این سطح، فعالیت‌ها درونی شده و بدون بررسی مثال‌ها می‌باشند.

بالاچف معتقد است که این چهار سطح از تفکر دانش‌آموزان در زمینهٔ اثبات را می‌توان در دو دستهٔ کلی قرار داد که خود آنها را تحت عنوان توجیهات عملی[۳۶] و توجیهات مفهومی[۳۷] معرفی می‌نماید. بالاچف، آن دسته از توجیهاتی را که براساس مثال‌ها و تصاویر می‌باشند، جزء توجیهات عملی درنظر می‌گیرد و سه سطح اول را در این دسته قرار می‌دهد و توجیهاتی را که بر اساس فرمول‌های انتزاعی و مجرد و روابط بین آنها می‌باشند، و در واقع نوعی از استدلال استنتاجی در آنها دیده می‌شود، توجیهات مفهومی می‌نامد و متعلق به سطح چهارم می‌داند. لازم به ذکر است که چارچوب بالاچف می‌تواند روشی برای تحلیل و دسته‌بندی حدسیات و توجیهات دانش‌آموزان در همهٔ دوره‌های تحصیلی باشد.

۲.۲. سطوح اثبات در مدل میازاکی (۲۰۰۰)

میازاکی (۲۰۰۰) با بررسی توانایی اثبات دانش آموزان در دورهٔ متوسطه، مدلی را برای سطوح اثبات آنها پیشنهاد می‌دهد. او در تحقیق خود از دانش آموزان می‌خواهد که گزارهٔ زیر را ثابت کنند؛

گزاره «ثابت کنید که جمع سه عدد متوالی، سه برابر عدد میانی است.»

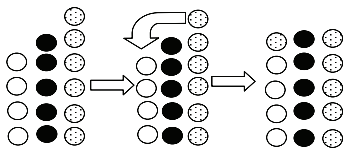
میازاکی بر اساس پاسخ دانش‌آموزان، چهار سطح اثبات آنها را از دو جنبه بررسی می‌کند که عبارتند از: ۱. محتوای[۳۸] اثبات، و ۲. بازنمایی[۳۹] (ارائهٔ) اثبات. طبقه بندی سطوح اثبات از دیدگاه میازاکی در جدول۱، ارائه شده است؛

جدول ۱. طبقه‌بندی سطوح اثبات دانش‌آموزان از دیدگاه میازاکی (۲۰۰۰)

محتوا / بازنمایی	استدلال استقرایی[۴۰]	استدلال استنتاجی[۴۱]
زبان رسمی استدلال	اثبات D	اثبات A
زبان‌های دیگر، تصاویر و وسایل قابل استفاده	اثبات C	اثبات B

در جدول شمارهٔ ۲، مثال‌هایی از چهار سطح اثبات که میازاکی (۲۰۰۰) در کار دانش‌آموزان خود مشاهده می‌کند، بیان می‌گردد.

جدول ۲. مثال‌هایی از چهار سطح اثبات که میازاکی (۲۰۰۰) در کار دانش‌آموزان مشاهده می‌کند.

سطح اثبات	مثالی از اثبات در سطح موردنظر	توضیح
اثبات A	فرض می‌کنیم n-۱ و n و n+۱ سه عدد متوالی باشند، در نتیجه داریم: (n-۱)+n+(n+۱)=n+n+n-۱+۱=۳n پس درستی گزاره ثابت می‌شود.	در واقع این اثبات، شامل استدلال استنتاجی براساس فرضیه‌هایی است که قبلاً درستی آنها را پذیرفته‌ایم وزبان این اثبات، رسمی و نمادین می‌باشد.
اثبات B		همان‌گونه که در شکل مشاهده می‌شود، یک مهره از ستون سوم به ستون اول جابه‌جا می‌شود و درستی گزارهٔ مطرح شده با تصویر نشان داده می‌شود. میازاکی (۲۰۰۰) معتقد است این اثبات، شامل فرایند تغییر[۴۲] (تبدیل) شکل می‌باشد که خود بیانگر یک استدلال استنتاجی است و بیان اثبات از طریق استفاده از شکل‌ها و تغییر آنها صورت می‌پذیرد.
اثبات C	۳+۴+۵=۳×۴ ۷+۸+۹=۳×۸ ۵۶۹+۵۷۰+۵۷۱=۳×۵۷۰ در نتیجه، جمع سه عدد متوالی سه برابر عدد میانی است.	این سطح از اثبات، شامل استدلال استقرایی است که با نمادهای عددی (۹، ۵۷۰ و...) نمادهای عملیاتی (+، ×) و نمادهای ارتباطی (=) و اصطلاحات ریاضی (اعداد متوالی و...)، ارائه می‌شود. این علائم به‌عنوان یک زبان رسمی استدلال در نظر گرفته نمی‌شوند، بلکه تنها به‌عنوان نمادهایی برای پیشبرد محاسبه به‌کار می‌روند (میازاکی، ۲۰۰۰).
اثبات D	(a و b و c سه عدد متوالی‌اند) a+b+c=۳b (e و f و g سه عدد متوالی‌اند) e+f+g=۳f (i و j و k سه عدد متوالی‌اند) i+j+k=۳j در نتیجه، جمع سه عدد متوالی سه برابر عدد میانی است.	در این سطح از اثبات، تفاوت نمادهای جبری، بیانگر تفاوت سه عدد است. گزارهٔ کلی براساس این سه مورد نتیجه‌گیری شده است. اگرچه در این اثبات، نمادهای جبری و عددی به گونه‌ای مرتب شده‌اند که بیانگر گزارهٔ «جمع سه عدد متوالی، سه برابرعدد میانی است» هستند، اما از قانون خاصی برای مرتب کردن یا کوتاه کردن جملات استفاده نشده است.

همان‌گونه که میازاکی (۲۰۰۰) بیان می‌کند، اثبات A در پیشرفته‌ترین سطح استدلال در ریاضیات متوسطه قرار دارد و اثبات C دارای پایین‌ترین سطح دراین طبقه‌بندی می‌باشد. همچنین او اثبات B و D را حد وسط اثبات‌های A و C می‌داند و معتقد است که با انجام فعالیت‌های مناسبی می‌توان

سطوح اثبات دانش‌آموزان را ارتقا داد به گونه‌ای که به سطح A برسند. علاوه بر این، میازاکی سطح اثبات B را مقدمه‌ای برای ورود به سطح A می‌داند. توجه به این نکته ضروری است که برای ارتقای سطح اثبات دانش‌آموزان، ابتدا باید آنها اهمیت و ضرورت ورود به سطوح بالاتر اثبات را درک کنند. از این‌رو معلم باید سعی کند در قالب مثال‌ها و فعالیت‌های مناسب، محدودیت استدلال استقرایی را به دانش‌آموزان نشان دهد.

۲.۳. روش‌های اثبات در مدل وبر (۲۰۰۴، ۲۰۰۵)

وبر(۲۰۰۴ و ۲۰۰۵) در مطالعهٔ خود چارچوبی را ارائه می‌کند که می‌توان برای توصیف فرایندهای نوشتن اثبات دانش‌آموزان و دانشجویان از آن استفاده نمود. او در این چارچوب، سه روش اثبات را معرفی می‌کند که عبارتند از: ۱. روش رویه‌ای[۴۳] ۲. روش اصولی[۴۴] ۳. روش معنایی[۴۵].

وبر در پژوهش خود فرایند نوشتن اثبات دانشجویان دورهٔ کارشناسی را مورد بررسی قرار می‌دهد. این مشاهدات و بررسی‌ها شامل مصاحبه و درخواست از دانشجویان برای بلند فکرکردن[۴۶] در طول تلاششان برای اثبات گزاره‌های موردنظر است. در ادامه، چارچوب ارائه شده توسط وبر به اختصار بیان می‌گردد.

۲.۳.۱. اثبات رویه‌ای

وبر (۲۰۰۴و۲۰۰۵) معتقد است که در یک اثبات رویه‌ای، شخص تلاش می‌کند از طریق به کاربردن رویه‌ها به نتیجهٔ مورد نظر برسد. یعنی مجموعه‌ای از مراحل معین و مشخص که شخص براین باور است، نتیجه‌اش یک اثبات معتبر خواهد بود. برای مثال اگر یک دانش‌آموز مشاهده کند که معلم به روش برهان خلف ثابت می‌کند $\sqrt{2}$ گنگ است، او هم ممکن است به روش مشابه ثابت کند که $\sqrt{3}$ نیز گنگ است؛ البته شاید دانش‌آموز هنوز درک درستی از اثبات آن گزاره نداشته باشد و به طور کامل از درستی روش فوق قانع نشده باشد. وبر (۲۰۰۴) در مورد برخی از دانشجویان مشاهده می‌کند که آنها وقتی که می‌خواهند یک گزارهٔ ریاضی را ثابت کنند، سعی می‌کنند الگویی را در نظر بگیرند و سپس از روی آن تقلید کنند. گاهی آن‌ها اثبات معتبری ارائه می‌دهند، اما نمی‌توانند توضیح دهند که چرا در اثباتشان از قوانین منطقی خاصی استفاده کرده‌اند.

۲.۳.۲. اثبات اصولی

در اثبات اصولی، شخص تلاش می‌کند با استفادهٔ صحیح از تعاریف و اصول موضوعه و دیگر حقایق مربوط و به روش منطقی به نتیجهٔ مورد نظر دست یابد. در واقع در این روش، دست‌ورزی منطقی با گزاره‌ها را بدون استفاده از بازنمایی‌های شهودی از مفاهیم ریاضی مشاهده می‌کنیم. برای مثال، دانش‌آموزی که یک گزاره را به شکلی نمادینِ هم ارز با آن گزاره تبدیل می‌کند و از طریق به کار بردن درست نمادها به نتیجهٔ مطلوب و موردنظر می‌رسد، به روش اصولی اثبات را انجام داده است. این روش

در کتاب‌های درسی نیز رایج است (دی وانس پرونسن[47]، ۲۰۰۸).

یک تفاوت برجسته بین اثبات رویه‌ای و اصولی، تصمیم‌گیری در این دو فرایند است. وبر (۲۰۰۵) معتقد است که در اثبات رویه‌ای دانش‌آموز تلاش می‌کند عمل اثبات را مانند یک تمرین، که در آن روند کار مشخص است، انجام دهد. در حالی‌که در فرایند اثبات اصولی، شخص فرایند اثبات را مانند حل مسئله که در آن فعالیت‌های ریاضی و همچنین رویکرد مناسب برای حل مسأله مشخص نیست، انجام می‌دهد.

۲.۳.۳. اثبات معنایی

درسومین دسته، یعنی اثبات معنایی، شخص ابتدا تلاش می‌کند از طریق بررسی بازنمایی‌های اشیای مرتبط با مفاهیم ریاضی (مثلاً شکل‌ها و نمودارها) دلیل درستی یک گزاره را بفهمد و سپس این استدلال و درک مستقیم و شهودی را به عنوان پایه‌ای برای ساخت یک اثبات رسمی به کار برد (وبر، ۲۰۰۴).

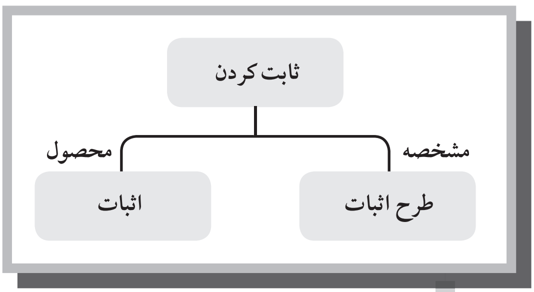
به‌عنوان مثال، وبر(۲۰۰۴) توضیح می‌دهد که یکی از دانشجویانش برای اینکه ثابت کند دنبالهٔ {...و ۰و۱و ۰و۱} دنباله‌ای واگرا است، ابتدا با رسم خطوط $y=1$ و $y=0$ و همچنین رسم نواری افقی بین این دو خط در صفحهٔ مختصات دکارتی، روی وجود عدد طبیعی n و ε (اپسیلن) دلخواه بحث می‌کند و به این نتیجه می‌رسد که برای هر اپسیلن دلخواه، دنبالهٔ فوق، حد ندارد و در نتیجه واگراست و سپس سعی می‌کند این نتیجه را به زبان رسمی بیان نماید.

وبر بر این باور است که تفاوت اصلی بین این سه فرایند اثبات، روشی است که دانشجو در شروع رویکرد یک اثبات درنظر می‌گیرد و انجام می‌دهد و نه ضرورتاً در محصول پایانی. در واقع او معتقد است که هرسه فرایند، می‌توانند از طریق مسیرهای مختلف به اثبات یکسانی منجر شوند. به علاوه ممکن است که رویکرد دانشجو تنها به یک فرایند ختم نشود و در یک مسئله و یا از مسئله‌ای به مسئلهٔ دیگر، رویکرد خود را تغییر دهد (دی وانس پرونسن، ۲۰۰۸). لازم به ذکر است که روند اثبات رویه‌ای فرصت‌هایی را جهت تمرین به‌کارگیری تکنیک‌های عمومی و رویه‌های قابل اطمینان برای اثبات فراهم می‌نماید. همچنین فرایند اثبات اصولی موجب می‌شود که دانشجویان، استراتژی‌ها و دست‌ورزی‌های منطقی را برای ساخت اثبات توسعه دهند. اما به کارگیری صرف این دو رویکرد ممکن است فرصتی را به منظور توسعه یا تصحیح بازنمایی‌های شهودی از مفاهیم ریاضی برای دانشجویان فراهم نکند و فراگیر به طور کامل فرایند اثبات و ایجاد یک نظریهٔ صوری را درک نکند. همچنین وبر (۲۰۰۴ و ۲۰۰۵) معتقد است که محصولات «اثبات معنایی» معمولاً فهم بیشتر و وسیع تری را از ساختارهای ریاضی در یک گزاره نشان می دهند. البته او معتقد است باید روش‌هایی را در آموزش به‌کار گرفت که در فرصت‌های مناسب، دانشجو به طور صحیح درگیر نوع خاصی از این سه فرایند اثبات شود؛ زیرا به کارگیری درست این سه فرایند در زمان مناسب، نقش مهمی را در آموزش و یادگیری اثبات ایفا می‌کند. البته وبر (۲۰۰۵، ۲۰۰۴) در طبقه‌بندی فرایند اثبات دانشجویان، اشارهٔ صریحی به اثبات‌های غیررسمی نمی‌کند،

در صورتی‌که تحقیقات (به عنوان مثال، هارل و ساودر، ۱۹۹۸؛ کادوالادرولسکر،۲۰۰۷؛ وارجیس،۲۰۰۷) نشان می‌دهند حتی برخی از دانشجویان در نوشتن اثبات‌های رسمی با مشکل مواجه می‌شوند و گاهی صرفاً استدلال‌های استقرایی و بازنمایی‌های شهودی را برای متقاعد شدن مورد استفاده قرار می‌دهند که البته این مشکلات را وبر نیز در کار دانشجویان خود مشاهده نموده ولی جزء دسته‌بندی خود قرار نداده است.

۲.۴. طرح‌های اثبات در مدل هارل و ساودر (۱۹۹۸ و ۲۰۰۷)

هارل و ساودر (۱۹۹۸و ۲۰۰۷) برای بررسی درک و فهم دانش آموزان از اثبات، از اصطلاح «طرح اثبات[۴۸]» استفاده می‌نمایند. این اصطلاح، اشاره به توجیهات و دلایلی دارد که یک فرد برای متقاعد کردن خود و دیگران، برای تأیید یا رد یک گزاره از آنها استفاده می‌کند. از نظر هارل (۲۰۰۸) «اثبات»، استدلالی ویژه است که شخص آن را برای متقاعد کردن خودش یا دیگران در مورد صحت و درستی یک گزاره ارائه می‌دهد، درحالی‌که «طرح اثبات»، یک ویژگی و مشخصهٔ شناختی جامع[۴۹] از اثبات‌هایی است که فرد ارائه می‌دهد. در واقع همان‌گونه که در شکل۲ مشاهده می‌شود، هارل معتقد است که محصول عمل «ثابت کردن»، «اثبات» است و مشخصهٔ شناختی آن، «طرح اثبات» می‌باشد.



شکل ۲ مدل هارل (۲۰۰۸) در رابطه با فرایند اثبات مشخصه

هارل و ساودر (۱۹۹۸، ۲۰۰۷)، طرح‌های اثبات دانش‌آموزان را به سه دستهٔ کلی تقسیم می‌کنند که عبارتند از:۱. طرح‌های اثبات متقاعدکنندهٔ بیرونی[۵۰] ۲. طرح‌های اثبات تجربی[۵۱] ۳. طرح‌های اثبات تحلیلی[۵۲](استنتاجی). این سه دسته خود به رده‌های دیگری تقسیم می‌شوند که به اختصار به توضیح آنها خواهیم پرداخت؛

۱. طرح اثبات متقاعدکنندهٔ بیرونی: در این طرح، شک و تردیدها از طریق موارد زیر برطرف می‌گردد:

۱-۱. طرح اثبات آیینی[۵۳]: در این طرح، دانش‌آموز بر این باور است که استدلال در صورتی یک اثبات است که مطابق با آداب و آیین خاص ریاضی باشد. در واقع دیدگاه فرد، بر این اساس است که ساختار ظاهری یک اثبات، چیزی است که آن اثبات را معتبر می‌سازد و نه محتوای آن.

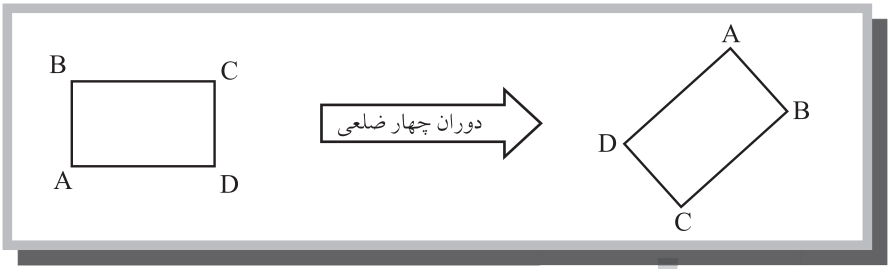
۲-۱. طرح اثبات مرجع مدار[54]: در این طرح، دانش‌آموز بدین‌گونه فکر می‌کند که یک استدلال در صورتی می‌تواند به‌عنوان یک اثبات درنظر گرفته شود که توسط یک مرجع رسمی مانند معلم یا یک ریاضیدان مشهور و یا کتاب‌های درسی ارائه و تأیید گردد.

۳-۱. طرح اثبات نمادین[55]: این طرح به معنای استفادهٔ سمبلیک یا نمادین از نمادها و زبان جبری برای بیان استدلال است که می‌تواند از لحاظ ریاضی، سطحی و بی‌معنی باشد و یا اینکه یک تکنیک قوی به شمار رود.

۲. طرح اثبات تجربی: در این طرح، اثبات گزاره‌ها از طریق مثال‌ها و حقایق فیزیکی یا تجربه‌های حسی تأیید یا رد می‌شوند و در دو دسته قرار می‌گیرند که عبارتند از:

۱-۲. طرح اثبات استقرایی: این طرح، به معنای تأیید یا رد یک گزاره و نتیجه گیری کلی بر اساس چند مثال یا مورد خاص است؛ نفوذ این طرح در بین دانش آموزان در همه‌ی سطوح تحصیلی دیده می‌شود (استایلیانیدز، ۲۰۰۵ و ۲۰۰۷؛ پاداک، ۲۰۰۹ ؛ وارجیس،۲۰۰۷؛ هارل و ساودر،۱۹۹۸، ۲۰۰۷).

۲-۲. طرح اثبات ادراکی[56] **(حسی):** در این طرح، فرد بر اساس مشاهدات ادراکی و تصاویر اولیهٔ ذهنی نتیجه‌گیری می‌کند؛ اما این مشاهدات، فاقد توانایی به‌منظور پیش‌بینی نتایج یک تغییر احتمالی است. به‌عنوان مثال، ممکن است دانش‌آموزی به‌طور حسی بیان نماید که چهارضلعی ABCD در شکل ۳ یک مستطیل است؛ اما پس از دوران شکل، نمی‌تواند نوع شکل را تشخیص دهد.



شکل ۳ دوران چهار ضلعی ABCD

۳. طرح اثبات تحلیلی[57] **(استنتاجی):** این طرح، از طریق استنتاج منطقی به حدسیه‌ها اعتبار می‌بخشد. در واقع این روش دربرگیرندهٔ دنباله‌ای از گزاره‌ها است که با استفاده از قوانین منطقی مناسب استنباط می‌شود و در دو دسته زیر طبقه‌بندی می‌گردد؛

۳.۱. طرح اثبات انتقالی[58]: این طرح اثبات، شامل همهٔ استنتاج‌های منطقی لازم و ضروری است اما این استنتاج‌ها بر اساس یک سیستم اصل موضوعی مطرح نمی‌شوند. این طرح اثبات شامل سه ویژگی مهم است که عبارتند از: عمومیت[59]، تفکر عملیاتی[60] (فرایندی) و استنباط منطقی[57] (هارل

و ساودر، ۲۰۰۷). هدف از ویژگی عمومیت، توجیه یک بحث به‌طور همگانی است، نه به‌صورت موارد جدا و استثنا. علاوه براین، موقعی که یک فرد اهداف را شکل می‌دهد و تلاش می‌کند که نتایج آنها را در طی فرایند اثبات مورد استفاده قرار دهد، تفکر عملیاتی رخ می‌دهد و سرانجام وقتی یک شخص می‌فهمد که توجیه در ریاضیات باید براساس قوانین استنباط و استنتاج منطقی باشد، ویژگی استنتاج منطقی به‌کار گرفته می‌شود.

۲.۳. طرح اثبات اصول موضوعه[۶۲]: این طرح، شامل همهٔ ویژگی‌های طرح اثبات انتقالی است و علاوه بر آن، موقعی که شخص در شروع فرایند یک اثبات، از اصطلاحات تعریف نشده و اصول موضوعه استفاده می‌کند و براساس یک سیستم اصول موضوعه نتیجه‌گیری و استنباط می‌نماید، می‌گوییم آن شخص دارای یک طرح اثبات اصول موضوعه است (هارل و ساودر، ۱۹۹۸).

توجه داشته باشیم حتی موقعی که دانش‌آموزان، طرح‌های اثبات تحلیلی(استنتاجی) را به کار می‌برند ممکن است باز هم اشتباهات و خطاهایی انجام دهند. البته این خطاها می‌تواند ناشی از بدفهمی‌ها و یا بی‌دقتی‌های ساده باشد. لازم به ذکر است که هارل و ساودر (۱۹۹۸) در تحقیقات خود دریافتند که تنها تعداد کمی از دانش‌آموزان، و حتی دانشجویان دورهٔ کارشناسی که در مطالعهٔ آن‌ها شرکت داشتند، دارای طرح اثبات تحلیلی(استنتاجی) می‌باشند.

هارل (۲۰۰۸) معتقد است که در فرایند «اثبات کردن» ، «طرح اثبات» افراد، می‌تواند بیانگر روش تفکر[۶۰] آنها در این فرایند باشد. او روش‌هایی را به عنوان زیرمجموعه‌هایی از طرح اثبات افراد، در مواجهه با مسائل اثباتی معرفی می‌کندکه عبارتند از:

۱. الگوی تعمیم نتیجه مدار (RPG[۶۴]) که مرتبط با طرح اثبات‌تجربی است.
۲. الگوی تعمیم فرایند مدار (PPG[۶۵]) که مرتبط با طرح اثبات تحلیلی (استنتاجی) می‌باشد.
۳. استدلال تعریفی[۶۶] که مرتبط با طرح اثبات تحلیلی (استنتاجی) است.

هارل، معتقد است که روش اول در بین دانش‌آموزان و حتی معلمان ریاضی رایج‌تر است. به‌عنوان مثال، می‌توان در پاسخ به سؤال زیر دو فرایند را در نظر گرفت؛

سؤال: چرا ۲،کران بالای دنبالهٔ .... و $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$ و $\sqrt{2+\sqrt{2}}$ و $\sqrt{2}$ می‌باشد؟

پاسخ اول (روش RPG): همان‌گونه که مشاهده می‌کنیم در دنبالهٔ زیر همهٔ جواب‌ها کمتر از ۲ هستند، پس ۲ کران بالای این دنباله می‌باشد.

$\sqrt{2}$; ۱/۴۴ ، $\sqrt{2+\sqrt{2}}$; ۱/۸۴، $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$; ۱/۹۶ و ....

پاسخ دوم (روش PPG): می‌دانیم که $\sqrt{2}$ کمتر از ۲ می‌باشد و جملهٔ دوم این دنباله نیز کمتر از ۲ است زیرا جمله‌ی دوم، ریشهٔ دوم عددی است که کمتر از ۴ است. در واقع این دو عدد، جمع عدد ۲ و

عددی است که کمتر از ۲ می‌باشد. این رابطه در تمام جملات دنباله برقرار است، لذا ۲ کران بالای دنبالهٔ موردنظر می‌باشد.

هارل (۲۰۰۸) استنتاج منطقی و استدلال براساس اصول موضوعه و تعاریف ریاضی را به‌عنوان «استدلال تعریفی» معرفی می‌کند و بیان می‌نماید که این روش تفکر، نیازمند رشد شناختی افراد است و در بین بسیاری از دانش‌آموزان کالج و حتی در بین فارغ‌التحصیلان ریاضی مورد استفاده قرار نمی‌گیرد.

هارل و ساودر (۱۹۹۸، ۲۰۰۷) معتقدند که یک فرد ممکن است در یک مدت زمان کوتاه، طرح‌های اثبات متنوعی را عرضه کند. همچنین آنها بر این باورند که این طبقه‌بندی تا حدودی ماهیت سلسله مراتبی[۶۷] دارد. به‌عنوان مثال، طرح اثبات انتقالی یک پیش‌نیاز ضروری برای طرح اثبات اصول موضوعه است. البته آنها می گویند: «ما معتقد نیستیم که طرح اثبات متقاعدکنندهٔ بیرونی در توسعهٔ طرح اثبات تحلیلی (استنتاجی) مؤثر باشد». هارل و ساودر (۱۹۹۸) در مطالعهٔ خود نشان دادند که بیشتر دانش‌آموزان شرکت‌کننده در تحقیق آنها دارای طرح اثبات متقاعدکنندهٔ بیرونی و طرح اثبات تجربی هستند. ریحانی، حمیدی و کلاهدوز (۱۳۹۱) نیز در پژوهش خود به‌منظور بررسی سطوح اثبات دانش‌آموزان سال دوم متوسطه به این نتیجه دست یافتند که اکثر دانش‌آموزان شرکت‌کننده در مطالعهٔ آنها، دارای «طرح اثبات متقاعدکنندهٔ بیرونی» و «طرح اثبات تجربی» می‌باشند. بدین معنی که اغلب دانش‌آموزان برای بررسی درستی یک گزاره از نمادهای ریاضی استفاده کرده‌اند که معنادار و هدفمند نمی‌باشد و به ظاهر اثبات نیز بیش از محتوای آن توجه داشته‌اند. همچنین برخی از آنها برای اثبات درستی یک گزارهٔ ریاضی بررسی یک یا چند مثال خاص را کافی دانسته‌اند. از نظر هارل و ساودر (۱۹۹۸) با توجه به اینکه ارزیابی مردم از فرضیه‌ها و وقایع در زندگی روزمره به‌طور طبیعی به‌صورت استدلال استقرایی است، استفاده از این دسته از استدلال‌ها در آموزش توسط دانش‌آموزان امری عادی می‌باشد. البته باید توجه داشت که هرچند استفادهٔ مناسب از استدلال‌های استقرایی در آموزش ریاضیات مدرسه‌ای امری ضروری است (کریستیو و پاپاجرجیو، ۲۰۰۷)، اما باید شرایط آموزشی را به گونه‌ای فراهم نمود که دانش‌آموزان به ضرورت استدلال‌های استنتاجی پی برده و طرح اثبات آنها فراتر از طرح اثبات تجربی توسعه یابد.

هارل (۲۰۰۸) معتقد است که طرح اثبات یک شخص از دیدگاه او در مورد ریاضیات تفکیک‌ناپذیر است. برای مثال اگر یک دانش‌آموز نگاهش به ریاضیات صرفاً به‌عنوان مجموعه‌ای از حقایق باشد، آنگاه به احتمال زیاد برای متقاعدکردن خودش و دیگران از درستی یک گزاره، به منابعی همچون کتاب درسی و معلم متوسل می‌شود. همچنین دانش‌آموزانی که بر این باورند که فرایند اثبات تنها برای قطعیت و تأیید گزاره‌های ریاضی به کار می‌رود، به این نتیجه خواهند رسید که ظاهراً اثبات‌ها نتایج بدیهی و معلوم هستند و صرفاً جنبهٔ ابزاری و رویه‌ای دارند (وبر، ۲۰۰۳). آموزشگران و معلمان ریاضی می‌توانند از طریق فعالیت‌های آموزشی مناسب در کلاس درس، باور دانش‌آموزان و توانایی آنها را در فرایند اثبات توسعه دهند و ضرورت استدلال‌های منطقی را برای آنها مشخص نمایند.

۲.۵. طرح‌های اثبات در مدل رکیو و گودینو (۲۰۰۱)

رکیو و گودینو (۲۰۰۱) مفهوم اثبات را در چهار زمینهٔ مختلف بررسی می‌کنند. آنها معتقدند که در زمینهٔ آموزش و تدریس باید به این معانی توجه کرد. زیرا تفکر فراگیران می‌تواند تحت تأثیر جامعه‌ای باشد که در آن فعالیت می‌کنند، جامعه‌ای که می‌تواند در آن، روش‌های استدلالی متفاوت وجود داشته باشد. لذا باید به فراگیران کمک کرد تا شرایط لازم را برای هرنوع استدلال تشخیص دهند. چهار زمینهٔ فوق عبارت‌اند از:

۱. **زندگی روزانه:** در این حیطه، افراد به طور طبیعی استدلال‌های غیر رسمی را مورد استفاده قرار می‌دهندکه لزوماً درست نیستند، زیرا دارای ارزش موضعی می‌باشند و فاقد ویژگی‌های عینی اثبات هستند. این روش استدلال در همهٔ زمینه‌های دانش حتی در ریاضیات و مسائل علمی نیز به‌کار می‌رود. البته باید توجه داشت که استفادهٔ به‌جا و مناسب از استدلال‌های غیررسمی در آموزش می‌تواند سطوح اولیهٔ اثبات را تشکیل دهد.

۲. **علوم تجربی:** برخلاف استدلال‌های روزمره، استدلال‌های مورد استفاده در علوم با هدف اعتبارسازی ارائه می‌گردند که منجر به تولید دانش عینی و مستدل در علوم می‌شوند. در این دسته، استدلال‌های تجربی جایگزین استدلال‌های شهودی می‌شوند و باورها جای خود را به نظریه‌ها می‌دهند که از لحاظ تجربی معتبر هستند. در ریاضیات این نوع استدلال‌ها، استدلال استقرایی- تجربی نامیده می‌شوند.

۳. **ریاضیات حرفه‌ای**[۶۸]: گودینو و رکیو اثبات ریاضی را در زمینهٔ ریاضیات حرفه‌ای به‌عنوان فرایندی منطقی می‌دانند که در طی آن، ریاضی‌دانان برای تأیید و تصدیق درستی گزاره‌های ریاضی، استدلال‌های منطقی و استنتاجی را ارائه می‌دهند. در این حیطه، اثبات‌ها استنتاجی‌اند اما می‌توانند صوری و رسمی نباشند.

۴. **منطق و مبانی ریاضیات**[۶۹]: در این زمینه، مفهوم اثبات در رابطه با سیستم‌های رسمی و استنتاجی توصیف می‌شود. بدین صورت که فرایند اثبات به عنوان دنباله‌ای از گزاره‌ها ظاهر می‌شود که هرکدام یا یک اصل موضوع هستند و یا از اصول موضوعه استنتاج می‌شوند. می‌توان گفت که در این دسته، استدلال‌ها به روش استنتاجی و به شکل صوری ارائه می‌گردند.

علاوه براین، گودینو و رکیو در تحقیق خود طرح‌های اثبات یادگیرندگان را مورد بررسی قرار داده و طبقه‌بندی می‌کنند و معتقدند که بین این طرح‌های شخصی و معانی اثبات در زمینه‌های گوناگون رابطه وجود دارد. رکیو و گودینو (۲۰۰۱) چهار طرح اثبات را بر اساس فرایندی که دانشجویان(سال اول) شرکت‌کننده در مطالعهٔ آنها برای نوشتن اثبات اجرا نموده‌اند، پیشنهاد می‌کنند.

۱. **طرح استدلال توضیحی**[۷۰]: هدف این طرح، اعتبار دادن به گزاره یا تأیید گزاره نیست، بلکه توضیح و تبیین گزارهٔ مورد نظر از طریق استدلال‌های شهودی و مثال‌های مرتبط با آن گزاره است.

۲. طرح اثبات تجربی ـ استقرایی[71]: این طرح براساس تأیید گزاره ازطریق مثال‌های خاص می‌باشد؛ بدون اینکه اعتبار و درستی گزارهٔ مورد نظر توضیح داده شود. در این طرح، رویه‌های استقرایی– تجربی برای تأیید گزاره مورد استفاده قرار می‌گیرند که فاقد قدرت اعتباردهی استدلال استنتاجی‌اند.

۳. طرح اثبات استنتاجی غیر رسمی[72]: در این طرح، تأیید گزاره بر اساس بررسی مثال‌ها نمی‌باشد، بلکه از روش‌های مقدماتی استدلال استنتاجی استفاده می‌شود. البته در این مورد نمادها و زبان جبری به صورت دقیق و جزئی مورد استفاده قرار نمی‌گیرند و گاهی بیان اثبات همراه با تصاویر، مثال‌ها و به‌صورت توضیحی می‌باشد.

۴. طرح اثبات استنتاجی رسمی[73]: در این طرح برای تأیید گزارهٔ مورد نظر، استدلال استنتاجی با استفاده از نمادهای ریاضی و زبان جبری به طور رسمی و صوری به کار گرفته می‌شود. رکیو و گودینو (۲۰۰۱) معتقدند این طرح اثبات بیشتر مربوط به شیوه‌هایی است که ریاضیدانان و معلمان ریاضی در روش‌های دقیق و انواع شکل‌های صوری اثبات استفاده می‌نمایند.همچنین آن‌ها براین باورند که این طرح‌های اثبات با معانی مختلف اثبات در نهادهای متفاوت جامعه در ارتباط می‌باشد.

۶-۲. مدل‌های دیگر اثبات

بلوم[74] و کرش[75] (۱۹۹۱، نقل شده در استیسی[76] و وینسنت[77]، ۲۰۰۹) نیز در مطالعه‌ی خود، بین سه سطح از اثبات در زمینه‌های آموزشی تمایز قائل می شوند که عبارتند از:

۱. تأیید تجربی[78]: به معنای تأیید یک گزاره از طریق بررسی تعداد معتنابهی از مثال‌ها؛

۲. اثبات ماقبل(پیش) رسمی[79]: استفاده از استدلال‌های درست اما غیر رسمی که منجر به نتیجهٔ معتبر اما غیررسمی می شود؛

۳. اثبات‌رسمی[80]: ارائهٔ استدلال‌های معتبر در سطح حرفه‌ای و تخصصی با بیان جبری.

بلوم و کرش، تنها دستهٔ اول را که کاملًا تجربی هستند، جزء اثبات‌های غیرمعتبر می‌دانند. همچنین آنها بر این باورند که دستهٔ دوم با اینکه نسبت به اثبات‌های رسمی شهودی‌ترند، اما معتبر می‌باشند.

بل[81] (۱۹۷۶، نقل شده در استایلیانیدز، ۲۰۰۵) و همچنین مارادس[82] وگوتی‌یرز[83] (۲۰۰۰) نیز بین دو دسته از استدلال‌ها و توجیهات مورد استفاده توسط دانش‌آموزان در اثبات‌های ریاضی تمایز قائل می‌شوند که عبارتند از:

۱. استدلال‌های تجربی که در آن، مثال‌ها به عنوان عناصر متقاعدکننده به‌کار می‌روند.

۲. استدلال‌های استنتاجی که اصول و قوانین استنتاجی برای نتیجه‌گیری مورد استفاده قرار می‌گیرند.

همچنین بل در هریک از این دسته‌ها انواع متفاوتی از استدلال‌ها را نیز بر اساس میزان کامل بودن استدلال مشخص می‌نماید.

۳. تحلیلی بر مدل‌ها و کاربرد آنها در آموزش

هر یک از این مدل‌ها و دسته‌بندی‌ها به نوعی می‌توانند عملکرد دانش‌آموزان و روش استدلال آنها را در فرایند اثبات مشخص نمایند و حتی در برخی موارد، این طبقه‌بندی‌ها نوع تفکر دانش‌آموزان و بدفهمی‌های آنها را در این زمینه نشان می‌دهند. به عنوان مثال، استفاده از روش تجربی ـ استقرایی که به‌عنوان یک دسته از سطوح اثبات یا روش استدلال در اغلب مدل‌ها وجود دارد، نشان می‌دهد که برخی از دانش‌آموزان، توانایی لازم را برای ارائهٔ استدلال‌های استنتاجی ندارند. همچنین بروز طرح اثبات متقاعدکنندهٔ بیرونی در مدل هارل و ساودر (۱۹۹۸، ۲۰۰۷) می‌تواند بیانگر این موضوع باشد که فرایند اثبات و ضرورت استدلال استنتاجی هنوز برای فراگیران، درونی سازی نشده است. به‌طور کلی طبقه‌بندی سطوح اثبات دانش‌آموزان و دانشجویان می‌تواند راهنمای خوبی برای معلمان و برنامه‌ریزان درسی در آموزش ریاضی، بویژه آموزش فرایند اثبات باشد. به عنوان مثال، این طبقه‌بندی می‌تواند به معلم یادآوری نماید که برای آموزش فرایند اثبات، ارائهٔ اثبات‌های رسمی در شروع تدریس، نامناسب است. براساس تعاریفی که هریک از این محققان برای قسمت‌های مختلف مدل پیشنهادی خود ارائه نموده‌اند به نظر می‌رسد بین بخش‌های مختلف این مدل‌ها یک همپوشانی (انطباق) وجود دارد که در جدول ۳، ارائه شده است.

جدول ۳. انطباق (هم‌پوشانی) ۸ مدل مربوط به دسته‌بندی پاسخ‌های دانش‌آموزان به مسائل اثبات

هارل و ساودر (۱۹۹۸، ۲۰۰۷)	بالاچف (۱۹۸۸)	میازاکی (۲۰۰۰)	رکیو و گودینو (۲۰۰۱)	وبر (۲۰۰۴، ۲۰۰۵)	بلوم و کرش (۱۹۹۱)	بل (۱۹۷۶) مارادس یرز (۲۰۰۰) و گوتی
طرح‌های اثبات	سطوح اثبات	سطوح اثبات	طرح‌های اثبات	روش‌های اثبات	سطوح اثبات	روش‌های استدلال در اثبات
طرح اثبات استنتاجی (تحلیلی)	مثال نوعی (توجیه عملی)	استدلال استنتاجی (زبان‌های غیررسمی، تصاویر و وسایل قابل استفاده)	طرح اثبات استنتاجی غیررسمی	اثبات معنایی	اثبات پیش‌رسمی	استدلال استنتاجی
	آزمایش (تجربه فکری (توجیهات مفهومی)	استدلال استنتاجی (زبان رسمی استدلال)	طرح اثبات استنتاجی رسمی	اثبات اصولی	اثبات رسمی	
طرح اثبات متقاعدکنندهٔ بیرونی		استدلال استقرایی (زبان رسمی استدلال)		اثبات رویه‌ای		
طرح اثبات تجربی	تجربه‌گرایی ساده و غیردقیق (توجیه عملی)		طرح استدلال توضیحی		اثبات تجربی	استدلال تجربی
	آزمایش تعیین‌کننده (توجیه عملی)	استدلال استقرایی (زبان‌های غیررسمی، تصاویر و وسایل قابل استفاده)	طرح اثبات استقرایی، تجربی			

با توجه به مدل‌های ارائه شــده، این نتیجه حاصل می‌شــود که طبقه‌بندی پاسخ‌های دانش‌آموزان به مسائلِ مرتبط با اثبات، می‌تواند به دو صورت انجام پذیرد:

۱. بدون توجه به دیدگاه دانش‌آموزان به اثبات و صرفاً بر اساس روش استدلال آنها؛

۲. با توجه به نوع تفکر دانش‌آموزان در فرایند اثبات و نیز روش اســتدلال‌های آنها شــده در اثبات.

همچنین در برخی از این مدل‌ها نیز می‌توان یک دسته‌بندی کلی را ارائه نمود؛ ۱. اثبات بر مبنای استدلال استقرایی ـ تجربی و ۲. اثبات بر مبنای استدلال استنتاجی.

همانگونه که در جدول۳، مشاهده می‌شود، استدلال‌ها و اثبات‌هایی که در مدل‌های مختلف بر اساس اســتدلال استنتاجی هستند، در یک ســطح قرار گرفته‌اند و اثبات‌هایی که بر اساس استدلال استقرایی ـ تجربی هســتند در دســتهٔ دیگر واقع شــده‌اند. به عنوان مثال، در مدل بالاچف (۱۹۸۸) سه نوع از اثبات دانش‌آموزان یعنی «مثال نوعی»، «تجربه‌گرایی ساده» و «آزمایش تعیین‌کننده» هر سه در طبقهٔ توجیهات عملی قرار گرفته‌اند که می‌توان آنها را جزء استدلال استقرایی مشخص نمود. البته‌به طور واضح، اثبات در قالب «مثال نوعی» از آن دوتای دیگر قوی‌تر است و می‌توان آن را به‌عنوان استدلال استنتاجی اما به زبانی غیر نمادین در نظر گرفت. هارل و ساودر (۲۰۰۷) نیز این بخش از مدل بالاچف (۱۹۸۸) را جزء دســتهٔ «طرح اثبات اســتنتاجی» در مدل خود می‌دانند؛ زیرا آنها بر این باورند که این نوع از اثبات، سه ویژگی طرح اثبات انتقالی یعنی ویژگی عمومیت، تفکر عملیاتی (فرایندی (و اســتنباط منطقی را شامل می‌شــود. بییهلر و کمپن[۸۴] (۲۰۱۳) براســاس تحقیقات انجام گرفته در ارتباط با کاربرد مثال‌های نوعی، بیان می‌دارند که اثبات‌های نوعی[۸۵] می‌توانند مســیر را برای هدایت دانش‌آموزان به اثبات‌های رســمی هموار ســازند و به آنها کمک نمایند که با متغیرهای موجود در اثبات‌های رســمی و ساختار آنها مواجه شوند. با این وجود آنها در مطالعهٔ خود به این نتیجه دست یافتند که در جریان انتقال از اثبات نوعی به اثبات رســمی می‌تواند مشکلاتی به‌وجود آید. از جمله اینکه برخی از دانش‌آموزان، ایدهٔ اصلی موجود در مثال‌های نوعی را برای تعمیم دادن به حالت کلی متوجه نخواهند شــد و همچنین برخی از آنان در انتقال از اثبات‌های نوعی به اثبات‌های رسمی، در به‌کارگیری زبان رسمی ریاضیات و متغیرهای معنی‌دار با مشکل مواجه خواهند گردید. استایلیانیدز (۲۰۰۵) معتقد است که در سال‌های اول مدرسه، اثبات‌های نوعی از جایگاه ویژه‌ای برخوردارند؛ زیرا به نظر می‌رسد که این اثبات‌ها دارای پتانسیل بالایی به عنوان یک پل ارتباطی بین استدلال‌های تجربی و اثبات‌های منطقی می‌باشند و می‌توانند فضایی را ایجاد کنند که دانش‌آموزان در آن بتوانند با استدلال‌های استنتاجی سروکار داشته باشند و حتی موقعی که آنها فاقد زبان رســمی ریاضی برای بیان اثبات‌ها می‌باشند، گزاره‌های ریاضی را ثابت کنند. با این وجود در مدل وبر(۲۰۰۴، ۲۰۰۵)، اشــاره‌ای به اســتدلال‌های تجربی و استقرایی دانشــجویان نشده است و وبر، تنها استدلال‌های استنتاجی آنها را طبقه‌بندی می‌کند.

به نظر می‌رســد که در اغلب این مدل‌ها به طور مســتقیم، نمی‌توان جایگاهی برای اســتدلال نادرست

دانش‌آموزان یا دانشجویان، درنظر گرفت. به عنوان مثال اگر دانش‌آموزی درستی یک گزارهٔ ریاضی را با استفاده از نمادهای ریاضی اما به‌طور نادرست و یا در حالتی خاص، ثابت کند، نمی‌توان جایگاه مناسبی برای استدلال او در چارچوب‌های ارائه شده در نظر گرفت. تنها شاید بتوان این نوع استدلال را در مدل هارل و ساودر (۲۰۰۷) در طبقهٔ «طرح اثبات متقاعدکنندهٔ بیرونی» قرار داد؛ هر چند که برای اطمینان از جایگاه درست استدلال‌ها در مدل هارل و ساودر، بهتر است که دلیل عملکرد دانش‌آموزان را از نظر خود آنها بدانیم.

۴. ارائهٔ یک چارچوب پیشنهادی براساس روش و شکل استدلال در فرایند اثبات

در برخی از مدل‌های ارائه شده، تفکیک فرایند اثبات، تنها براساس روش‌های استدلال به دو صورت استقرایی ـ تجربی و استنتاجی انجام گرفته است. البته در تعدادی از آنها، ارائهٔ این دو روش از استدلال در طبقات جزئی‌تر مطرح شده‌اند؛ به‌عنوان مثال در مدل بالاچف (۱۹۸۸) استدلال‌های عملی به بخش‌های جزئی‌تر طبقه‌بندی می‌شوند و در مدل بلوم و کرش (۱۹۹۱، نقل شده در استیسی و وینسنت، ۲۰۰۹) نیز ارائه‌ی استدلال استنتاجی به دو شکل اثبات‌های رسمی و پیش رسمی بیان گردیده‌اند. با این وجود به نظر می‌رسد که بیان دقیق‌تر شکل استدلال‌های ارائه شده توسط فراگیران همراه با روش‌های این استدلال‌ها بهتر می‌تواند نوع تفکر و حتی در برخی موارد، طرح اثبات آنها را مشخص نماید.

لذا براساس تحلیل مدل‌های ارائه شده و همچنین بر مبنای نتایج یک کار پژوهشی (ریحانی و همکاران، ۱۳۹۱) که به‌منظور بررسی درک و فهم دانش‌آموزان از اثبات انجام گرفته است ، یک دسته‌بندی کلی ارائه می‌گردد. این طبقه‌بندی با توجه به شکل و روش استدلال دانش‌آموزان در پاسخ به سوالات مرتبط با اثبات، انجام گرفته است (جدول ۴ و ۵). همان‌گونه که در جدول ۴، مشاهده می‌گردد، استدلال‌های ارائه شده توسط یک شخص برای اثبات درستی یک ادعای ریاضی، از لحاظ شکل می‌تواند در سه دسته طبقه‌بندی شود. همچنین می‌توان استدلال‌ها را از لحاظ محتوا و روش استدلال در سه دسته‌ی استقرایی، استنتاجی و بدون پایه و اساس طبقه‌بندی نمود (جدول ۵).

جدول ۴. طبقه‌بندی استدلال افراد براساس شکل استدلال

شکل استدلال	ویژگی‌های استدلال
تجربی	استدلال‌هایی که براساس شکل (ارائهٔ تصویر) و یا ارائهٔ تعدادی مثال، درستی گزارهٔ موردنظر را تأیید می‌کنند.
نمادین	استدلال‌هایی که صرف‌نظر از درستی یا نادرستی آنها با استفاده از نمادهای ریاضی، درستی گزارهٔ موردنظر را تأیید می‌نمایند.
روایت‌گونه	استدلال‌هایی که صرف‌نظر از درستی یا نادرستی آنها به‌صورت توضیحی و بدون استفاده از فرمول ریاضی، گزارهٔ موردنظر را تأیید می‌کنند.

جدول ۵. طبقه‌بندی استدلال افراد براساس روش استدلال

روش استدلال	ویژگی استدلال
استقرایی	به معنای نتیجه‌گیری و کشف حقایق کلی بر مبنای وقایع جزئی و دستهٔ محدودی از مشاهدات است.
استنتاجی	این روش، شامل دنباله‌ای از گزاره‌هاست که به‌طور منطقی باهم در ارتباط هستند و براساس حقایق واقعیت‌های پذیرفته شده، به یک نتیجه‌گیری درست منتهی می‌گردد.
بدون پایه و اساس	استدلال‌هایی که صرف‌نظر از شکل آنها، هدفمند نمی‌باشند و مرتبط با گزارهٔ موردنظر نیستند و یا برای مراحل مختلف آنها دلیل موجهی وجود ندارد.

چارچوب کلی به منظور طبقه‌بندی استدلال‌افراد در پاسخ به سؤالات مربوط به اثبات در جدول ۶، ارائه شده است.

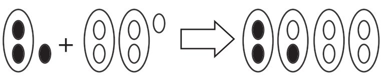
جدول ۶. دسته‌بندی استدلال افراد در پاسخ به سؤالات مربوط به اثبات، با توجه به شکل و روش استدلال

شکل استدلال	روش استدلال						
	استنتاجی				استقرایی		بدون پایه و اساس
	کلی		خاص		کلی	خاص	
	کامل	ناقص	کامل	ناقص			
نمادین							
روایت‌گونه							
تجربی							

منظور از روش «استدلال کلی» که در جدول۶، بیان گردیده، استدلالی است که به‌طور کلی و عمومی در قالب روش استقرایی یا استنتاجی، گزارهٔ موردنظر را ثابت می‌کند؛ اما چنانچه استدلالی گزارهٔ مورد نظر را برای مجموعهٔ خاص و محدودی از اشیاء ثابت نماید و حالت کلی در نظر گرفته نشود، به‌عنوان «استدلال خاص» محسوب می‌گردد.

همچنین اســتدلال‌های کلی یا اســتدلال‌های خاص که به شــکل نمادین یا روایت‌گونه‌اند و به‌طور کامل و صحیح، گزارهٔ مورد نظر را ثابت می‌کنند، تحت عنوان «استدلال کامل» در نظر گرفته می‌شوند و استدلال‌های کلی یا استدلال‌های خاص که به شکل نمادین یا روایت‌گونه می‌باشند و در بیان آنها نقص و کمبودی وجود دارد به‌عنوان «استدلال ناقص» شناخته می‌شوند. برای مشاهدهٔ کاربرد این چارچوب، گزاره‌ای ریاضی همراه با اســتدلال‌هایی در حمایت از آن ارائه می‌گردد (شــکل ۴)؛ ســپس جایگاه این استدلال‌ها در چارچوب ارائه شده در جدول ۶، تعیین خواهد شد (جدول۷).

حاصل جمع هر دو عدد فرد، عددی زوج است.

استدلال ۱: فرض می‌کنیم که a و b دو عدد فرد باشند، پس می‌توان آنهــا را به صورت $a=۲m+۱$ و $b=۲n+۱$ نوشت که m و n دو عدد صحیح، می‌باشند و داریم: $a+b=۲m+۱+۲n+۱=۲m+۲n+۲=۲(m+n+۱)$ که $(m+n+۱)$ نیز یک عدد صحیح اســت ، پس $a+b$، یک عدد زوج می باشــد و بدینگونه درستی گزاره، ثابت می‌شود.	**استدلال ۲:** مشاهده می‌کنیم که: ۱۲=۵+۷ ۱۰=۳+۷ ۶=۳+۳ ۴=۱+۳ ۱۰=۵+۵ ۴=۳+۱ ۸=۷+۱ ۸=۵+۳ پس جمع دو عدد فرد، نیز یک عدد زوج می‌شود
استدلال ۳: رقــم یکان اعــداد فرد، یکــی از ارقــام ۱، ۳، ۵، ۷ یا ۹ می‌باشد. موقعی که دو عدد فرد را با هم جمع می‌کنیم، جواب به یکی از ارقام ۰، ۲، ۴، ۶ یا ۸ ختم می‌شود. پس جمع دو عدد فرد، یک عدد زوج می‌باشد.	**استدلال ۴:** اگر مانند شکل زیر، اعداد فرد را دوتا دوتا دسته بندی کنیم، حاصل جمع آنها به صورت دســته‌های دوتایی در کنار هم قرار می‌گیرند. پس جمع دو عدد فرد، یک عدد زوج می‌شود. 
استدلال ۵: فرض می‌کنیم، a یک عدد فرد باشــد، پــس عدد فرد بعدی، $a+۲$ است و داریم: $a+(a+۲)=۲a+۲=۲(a+۱)$ پس جمع دو عدد فرد، عددی زوج می‌شود.	**استدلال ۶:** فــرض می‌کنیــم x و y دو عــدد فــرد باشــند و $z=x+y$ ، درنتیجه داریم: $\begin{cases} z=x+y \Rightarrow x+y=z-y+z-x \\ z=x+y \end{cases}$ درنتیجه: $۲z=۲x+۲y$، مشاهده می‌کنیم که z بر۲، بخش پذیراســت، در نتیجه، z که حاصل جمع دوعدد فرد می باشد، عددی زوج است.

شکل ۴ گزاره‌ای ریاضی همراه با استدلال‌هایی در حمایت از آن

جدول ۷. دسته‌بندی استدلال‌های ارائه شده در شکل ۴، با توجه به شکل و روش استدلال ارائه شده

شکل استدلال	روش استدلال						
	استنتاجی				استقرایی		بدون پایه و اساس
	کلی		خاص		کلی	خاص	
	کامل	ناقص	کامل	ناقص			
نمادین	استدلال ۱		استدلال ۵				استدلال ۶
روایت‌گونه		استدلال ۳					
تجربی	استدلال ۴				استدلال ۲		

با توجه به روش طبقه‌بندی ارائه شده در چارچوب پیشنهادی، تا حدودی می‌توان نوع تفکر دانش‌آموزان را در ارائهٔ اثبات و همچنین طرح اثبات آنها مشخص نمود. به‌عنوان مثال، استدلالی که به شکل نمادین ولی بدون پایه و اساس است (استدلال ۶)، می‌تواند بیانگر این موضوع باشد که دانش‌آموز هنوز قادر به استفاده‌ی درست از نمادهای ریاضی نیست و معنای این نمادها ممکن است برای او جنبهٔ ابزاری و تشریفاتی داشته باشد.

بحث و نتیجه‌گیری

طبقه‌بندی سطوح اثبات افراد در ریاضیات و بررسی روش استدلال آنها در فرایند اثبات، می‌تواند به روش‌های مختلفی انجام پذیرد. در واقع هدف یک محقق یا آموزشگر به منظور بررسی توانایی فراگیران در فرایند استدلال و اثبات، نوع تفکیک و طبقه‌بندی این توانایی را مشخص می‌نماید. به عنوان مثال برخی از مدل‌های اثبات در آموزش ریاضی، دو دستهٔ کلی از روش‌های استدلال یعنی روش استقرایی یا استنتاجی را مشخص می‌نمایند و ممکن است که تنها آگاهی از این نوع تفکر و به‌کارگیری روش استدلال در بین افراد یک جامعه، هدف محقق را برآورده سازد. برخی از محققان نیز با توجه به شرایط جامعهٔ مورد نظر، برای بررسی دقیق‌تر، وارد جزئیات عملکرد افراد آن جامعه در فرایند اثبات می‌شوند.

در پژوهش حاضر، بر اساس تحلیل مدل‌های پیشنهاد شده در ارتباط با اثبات ریاضی و همچنین بر مبنای نتایج یک کار پژوهشی (ریحانی و همکاران، ۱۳۹۱) که به منظور بررسی درک و فهم دانش‌آموزان از اثبات انجام گرفته است، چارچوبی پیشنهاد شده که مبنای آن، شکل

و روش استدلال دانش‌آموزان در پاسخ به سؤالات مرتبط با اثبات می‌باشد. توجه به روش استدلال فراگیران و همچنین در نظر گرفتن شکل این استدلال‌ها در قالب تجربی، نمادین و روایت‌گونه، می‌تواند علاوه بر طبقه‌بندی روش‌های اثبات افراد در ریاضیات، تا حدودی نوع تفکر و باور آنها را نسبت به فرایند اثبات نیز مشخص نماید. به نظر می‌رسد که این چارچوب پیشنهادی، تا حدود زیادی می‌تواند طبقات مختلف مدل‌های ارائه شده توسط محققان را نیز در برگیرد؛ با این وجود، به‌منظور بررسی و تحلیل دقیق توانایی افراد در فرایند اثبات، لازم است عوامل دیگری را که می‌توانند در کسب این توانایی مؤثر باشند، مورد توجه قرار داد. در واقع توانایی افراد و عملکرد آنها در فرایند اثبات یک گزارهٔ ریاضی، می‌تواند به عوامل مختلفی از جمله باور آنها نسبت به جایگاه اثبات در ریاضیات و روش تفکر آنها وابسته باشد.

به طور کلی در کنار طبقه‌بندی استدلال فراگیران در فرایند اثبات، توجه به این نکته نیز ضروری است که ارائهٔ اثبات توسط افراد، بر چه اساسی می‌تواند باشد. به‌عنوان مثال، اسکمپ (۱۹۷۹، نقل شده در میولر و ماهر[۸۶]، ۲۰۰۹) معتقد است، سه نوع درک و فهم وجود دارد که می‌توان روش‌های استدلال دانش‌آموزان را براساس این دسته بندی توجیه نمود. او توانایی افراد را برای به کاربردن قوانین معین به منظور حل مسئله (بدون دانستن اینکه چرا این قوانین کار می‌کنند) به‌عنوان درک ابزاری[۸۷] معرفی می‌نماید. این رویداد می‌تواند موقعی که دانش‌آموزان صرفاً روی رویه‌ها و الگوریتم‌ها متمرکز می‌شوند، بدون آنکه مفاهیم را درک کنند، رخ دهد. همچنین اسکمپ، توانایی افراد برای استنتاج قوانین یا رویه‌های خاص، براساس تعدادی روابط کلی و عمومی را به‌عنوان درک رابطه‌ای[۸۸] مشخص می‌نماید. این نوع فهم، زمانی رخ می‌دهد که دانش‌آموزان قادر به برقراری رابطه بین رویه‌ها و مفاهیم مورد بحث باشند. علاوه بر این، اسکمپ درک منطقی[۸۹] افراد را به معنای توانایی برای استدلال استنتاجی از طریق به کارگیری دنباله‌ای از استدلال‌های منطقی و مناسب با استفاده از تعاریف مربوطه، اصول موضوعه و قضیه‌ها مشخص می‌نماید. این درک و فهم، زمانی اتفاق می‌افتد که دانش‌آموزان فهم رابطه‌ای خود را برای توضیح استدلال‌هایشان و یا متقاعدکردن دیگران در یک جامعه مورد استفاده قرار می‌دهند. اسکمپ با مشخص کردن این چارچوب، نقش جامعه را در فهم افراد مهم می‌داند (میولر، ۲۰۰۷).

همچنین پیاژه (۱۹۸۷، نقل شده در مانسی، ۲۰۰۳) ادعا می‌کند که دانش‌آموزان بر اساس سه سطح (PL[۹۰]) در زمینه‌ی مهارت‌های مرتبط با اثبات و توجیه، پیشرفت می‌کنند. او معتقد است که دانش‌آموزان ۷ یا ۸ ساله در سطح PL۱ هستند. در این سطح، آنها رویدادهای وابسته را به‌طور مجزا درنظر می‌گیرند و هیچ ضرورتی درشفاف‌سازی نظرات‌شان نسبت به نظرات دیگران نمی‌بینند. در پایان این دوره، افکار دانش‌آموزان بیشتر جهت یافته می‌شود و آنها در

این سطح قادر به استنتاج مقدماتی و اولیه هستند. دانش‌آموزان سطح PL۲ بین سنین ۷ یا ۸ تا ۱۲-۱۱ سال می‌باشند. در این سطح، بچه‌ها شروع به حدسیه‌سازی و توجیه استدلال‌هایشان می‌کنند، گرچه ممکن است حدسیات آنها نادرست باشد؛ زیرا استدلال‌های آنها بر اساس نتایج تجربی است. در این سطح آنها قادرند رویدادهای بعدی را بر اساس رویدادهایی که در گذشته رخ داده است، به هم پیوند دهند. PL۳ در سن ۱۱ یا ۱۲ سال به بالا رخ می‌دهد. در این سطح دانش‌آموزان قادرند که استدلال‌های صوری و استنتاجی را ارائه دهند. همچنین آنها به ضرورت استدلال استنتاجی و منطقی و اهمیت توجیه حدسیاتشان پی می‌برند. برخی از محققین بر این باورند که در بعضی موارد، توانایی‌های شناختی افراد زودتر از آنچه پیاژه بیان می‌دارد پدیدار می‌شود و برعکس برخی از توانایی‌های شناختی ممکن است دیرتر از زمانی که پیاژه تصور می‌کند، ظاهر شود (بیابانگرد، ۱۳۸۸). به‌عنوان مثال، تحقیقات نشان می‌دهد که برخی از دانش‌آموزان متوسطه و حتی دانشجویان، به سطح عملکرد رسمی ریاضیات نرسیده‌اند (به‌عنوان مثال، هارل وساودر، ۱۹۹۸؛ چین ولین، ۲۰۰۹؛ یوسفی و خیّر، ۱۳۸۲؛ کلاهدوز، ۱۳۹۰؛ ریحانی و همکاران، ۱۳۹۱)؛ با این وجود، چارچوب شناختی نظریهٔ پیاژه، زیربنای نظری و اندازه‌گیری بسیاری از مفاهیم روان‌شناسی را تشکیل می‌دهد (یوسفی و خیّر، ۱۳۸۲).

لازم به ذکر است که معلمان در آموزش فرایند اثبات و بررسی توانایی دانش‌آموزان و طبقه‌بندی این توانایی‌ها باید به سبک یادگیری دانش‌آموزان نیز توجه داشته باشند. سبک‌های یادگیری افراد نشانگر آن است که آنان چگونه اطلاعات را شناسایی، قضاوت، تجسم، تأیید و ارزشیابی می‌کنند (سروقد و دیانت، ۱۳۸۸) و این به چگونگی یادگیری افراد مربوط می‌شود نه به توانایی آنها. در نتیجه معلمان باید برای افزایش توان یادگیری دانش‌آموزان در مفاهیم ریاضی، بویژه فرایند استدلال و اثبات، از چگونگی و انواع سبک‌های یادگیری آگاه باشند؛ زیرا سبک‌های مختلف یادگیری می‌تواند بر روش‌های آموزشی معلمان و پیشرفت تحصیلی دانش‌آموزان تأثیر گذارد(سیف، ۱۳۸۶). به عنوان مثال برخی از دانش‌آموزان در درس ریاضی، یادگیری از روی شکل و نمودارها را ترجیح می‌دهند و چنانچه معلم در آموزش اثبات‌های رسمی، بدون مقدمه و آماده کردن شرایط ذهنی آنها وارد مباحث انتزاعی شود ممکن است دانش‌آموزان در یادگیری این مباحث دچار بدفهمی شوند. لذا در کنار طبقه‌بندی سطوح اثبات افراد، لازم است به شرایط و عواملی که می‌توانند بر این سطوح، تأثیرگذار باشند، نیز توجه نمود و بدین‌وسیله به درک عمیق‌تری از ارتباط بین توانایی افراد در فرایند اثبات و عوامل شناختی، اجتماعی، فرهنگی و آموزشی رسید که بررسی این ارتباط و ارائهٔ مدل‌های دقیق‌تر، مستلزم انجام پژوهش‌های بیشتری است.

منابع

- بیابانگرد، اسماعیل. (۱۳۸۸). *روان‌شناسی تربیتی - روان‌شناسی آموزش و یادگیری* (چاپ سوم). تهران: ویرایش
- ریحانی، ابراهیم؛ حمیدی، فریده و کلاهدوز، فهیمه. (۱۳۹۱). بررسی درک و فهم دانش‌آموزان سال دوم متوسطه از استدلال و اثبات ریاضی. *فصلنامه علمی پژوهشی مطالعات برنامه درسی*، ۲۴، ۱۸۲- ۱۵۷.
- سروقد، سیروس، دیانت، عارفه سادات. (۱۳۸۸). مقایسه سبک‌های یادگیری و شیوه‌های حل مسئلهٔ دانشجویان دختر و پسر گرایش‌های علوم انسانی، علوم پایه و فنی - مهندسی، *فصلنامهٔ علمی پژوهشی رهیافتی نو در مدیریت آموزشی*، (۴)، ۹۲-۷۷.
- سیف، علی اکبر. (۱۳۸۶). *روان‌شناسی تربیتی*. تهران: آگاه.
- کلاهدوز، فهیمه. (۱۳۹۰). *بررسی درک و فهم دانش‌آموزان سال دوم متوسطه از استدلال و اثبات ریاضی*، (پایان نامه کارشناسی ارشد آموزش ریاضی). دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی، دانشکده علوم پایه، تهران.
- یوسفی، فریده، خیّر، محمد. (۱۳۸۲). بررسی رابطهٔ استدلال صوری، آگاهی عاطفی و پیشرفت تحصیلی در گروهی از دانش‌آموزان مدارس تیزهوش و عادی شهر شیراز. *مجله روان‌شناسی و علوم تربیتی*، ۳۳ (۲)و ۲۰۲-۱۷۷.

- Balacheff, N. (1988). Aspects of proof in pupils’ practice of school mathematics. In D. Pimm (Ed.), *Mathematics, Teachers and Children* (pp. 216-236). Great Britain: Hodder and Stoughton Educational.
- Balacheff, Nicolas (2010). Bridging Knowing and Proving in Mathematics:A Didactical Perspective In Hanna, Gila, Niels Jahnke, Hans & Pulte, Helmut (Ed.), *Explanation and proof in Mathematics*, (chap.9, pp. 115-134). New York: Springer Science.
- Biehler, Rolf & Kempen, Leander. (2013). *Students` use of variables and examples in their transition from generic proof to formal proof*. Proceedings from the eighth Conference of European Research in Mathematics Education (CERME). 6-10 February 2013, Retrieved from http://www.cerme8.metu.edu.tr/wgpapers/wg_papers.html.
- Cadwalladerolsker, Todd. (2007). *Proof schemes and proof writing*, (Unpuplished doctoral dissertation). university of Claremont Graduate , California.
- Chin, E-T. & Lin, F-L. (2009). A Comparative Study on Junior High School Students’ Proof Conceptions in Algebra between Taiwan and the UK. *Journal of Mathematics Education, 2,* (2), 52-67.
- Christou, Constantinos & Papageorgiou, Eleni. (2007). A framework of mathematics inductive reasoning. *Learning and Instruction, 17*, 55-66.
- Dee Vanspronsen, Hillary. (2008). *Proof processes of novice mathematics proof writers,* (Unpuplished doctoral dissertation). university of Montana,USA. Retrieved from ProQuest Digital Dissertations.
- Hanna, Gila & Barbeau, Ed. (2008). Proofs as bearers of mathematical knowledge, ZDM -The International Journal on Mathematics Education. T*he Special Issue on Proof ,* *40*, 345–353.
- Harel, Guershon. (2008). DNR perspective on mathematics curriculum and instruction, Part I: focus on proving. *ZDM Mathematics Education, 40*, 487–500
- Harel, G., & Sowder, L. (1998). Students’ proofs schemes: Results from exploratory studies. In A. Schenfeld, J. Kaput, & E. Dubinsky (Eds.), *Research in Colligate Mathematics Education III* (pp. 234-283). Providence, RI: American Mathematical Society.
- Harel, G., & Sowder, L. (2007). Toward comprehensive perspectives on the learning and teaching of proof. In F. K. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning.* Charlotte, NC: Information Age Publishing.
- Healy, L. & Hoyles, C. (2000). A study of proof conceptions in algebra. *Journal for Research in Mathematics Education, 31*(4), 396-428.

■ Stacey, Kaye & Vincent, Jill. (2009). Modes of reasoning in explanations in Australian eighth-grade mathematics textbooks. *Science and Mathematics Education, 72*, 271–288.

■ Stylianides, Andreas J. (2005). *proof and proving in school mathematics instruction: making the elementary grades part of the equation.* (Unpublished doctoral dissertation), The University of Michigan, USA.

■ Stylianides, Andreas J. (2007). Proof and proving in school mathematics. *Journal for research in mathematics education, 38*(3), 289-321.

■ Stylianides, Gabriel J. & Stylianides, Andreas J. (2008). Proof in School Mathematics: Insights from Psychological Research into Students' Ability for Deductive Reasoning. *Mathematical Thinking and Learning, 10*, 103-133.

■ Varghese, Thomas. (2007).*Student teachers conception of mathematical proof*. (Unpublished doctoral dissertation), The University of Alberta, Canada.

■ Weber, K. (2004). A framework for describing the processes that undergraduates use to construct proofs. *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 4,* 425-432.

■ Weber, K. (2005). Problem-solving, proving, and learning: The relationship between problem-solving processes and learning opportunities in the activity of proof construction. *Journal of Mathematical Behavior, 24*, 351-360.

■ Yankelewitz, Dina. (2009). *The Development of mathematical reasoning in elementary school students exploration of franction ideas,* (Unpublished doctoral dissertation), The university of New Jersey, USA.

■ Inglis, Matthew & Pablo Mejia-Ramos. (2011). Semantic contamination and mathematical proof: Can a non-proof prove?. *Journal of Mathematical Behavior, 30*, 19–29.

■ Kögce, Davut؛ Aydin, Mehmet & Yildiz, Cemalettin. (2010). The views of high school students about proof and their levels of proof (The case of Trabzon). *Procedia Social and Behavioral Sciences, 2*, 2544-2549.

■ Mansi , K.E. (2003). *Reasoning and proof in mathematics Education: A Review of the Litereture*. (Unpublished master's thesis), North Carolina State University, NC.

■ Marrades, R., and Gutiérrez, A. (2000). Proofs produced by secondary school students learning geometry in a dynamic computer environment. *Educational Studies in Mathematics, 44*, 87 - 125.

■ Miyazaki, M. (2000). Levels of proof in lower secondary school mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 41*(1), 47-68.

■ Mueller, Mary. (2007). *A study of the development of reasoning in sixth grade students*. (Unpublished doctoral dissertation), the state university of new Jersey, New Brunswick.

■ NCTM. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics, Inc.

■ Paddack, Megan. (2009). *The process of making meaning: The interplay between teachers knowledge of mathematical proofs and their classroom practices*. (Unpublished doctoral dissertation), university of new Hampshire, United States.

■ Recio, A. M., & Godino, J. D. (2001). Institutional and personal meanings of mathematical proof. *Educational Studies in Mathematics, 48*, 83-99.

پی‌نوشت‌ها

۱. این پژوهش با حمایت مالی دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی طبق قرارداد شماره ۱۱۵۸۹ مورخ ۹۱/۴/۲۴ انجام گردیده است.

2. Reasoning
3. Proof
4. National Council of Teachers of Mathematics
5. Harel
6. Sowder
7. Stylianides
8. Hanna
9. Barbeau
10. Yankelewitz
11. Kögce
12. Aydin
13. Yildiz
14. Griffiths
15. Weber
16. Bayazit
17. certainty
18. control structure
19. Mueller
20. Cadwalladerolsker
21. Miyazaki
22. Healy
23. Hoyles
24. Chin
25. Lin
26. Ramos
27. Inglis
28. Varghese
29. Recio
30.Godino
31. proof levels
32. Naïve empiricism
33. Crucial experiment
34. Generic example
35. Thought experiment
36. Pragmatic justification
37. conceptual justification
38. Content
39. Representation
40. Inductive
41. Deductive
42. transforming[3] -
43. Procedural
44. Syntatic
45. Semantic
46. Thinking aloud
47. Dee Vanspronsen
48. Proof Scheme
49. Collective Cognitive Characteristic
50. External Conviction
51. Empirical
52. Analytical
53. Ritual
54. Authoritarian
55. Symbolic
56. Perceptual
57. Analytical
58. Transformational
59. Generality
60. Operational thought
61. Logical inference
62. Axiomatic
63. way of thinking
64. Result Pattern Generalization
65. Process Pattern Generalization
66. definitional reasoning
67. hierarchy
68. Professional Mathematics
69. Logic and Foundations of Mathematics
70. Explanatory Argumentation Schemes
71. Empirical-Inductive Proof Schemes
72. Informal Deductive Proof Schemes
73. Formal Deductive Proof Schemes
74. Blum
75. Kirsch
76. Stacey
77. Vincent
78. Experimental verification
79. pre-formal proof
80. formal proof
81. Bell
82. Marrades
83. Gutiérrez
84. Biehler and Kempen
85. Generic Proof
86. Maher
87. instrumental understanding
88. relational understanding
89. logical understanding
90. Piaget Levels