

شناسایی سطح تفکر هندسی دانش‌آموزان پایه هشتم: مطالعه‌ای با به‌کارگیری طبقه‌بندی سولو

افسانه محبت‌پناه*

نرگس یافتیان**

* دبیر آموزش و پرورش استان تهران و دانشجوی دکتری گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی، تهران، ایران.

afsanehmohabatpanah@gmail.com

** نویسنده مسئول، دانشیار گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی، تهران، ایران. yaftian@sru.ac.ir

تاریخ دریافت مقاله: ۱۴۰۴/۷/۲۵ تاریخ شروع بررسی: ۱۴۰۴/۷/۲۷ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۴۰۴/۱۱/۱۹

چکیده

مطالعه حاضر با هدف بررسی سطح تفکر هندسی دانش‌آموزان پایه هشتم براساس سطوح طبقه‌بندی سولو با استفاده از مفهوم هم‌نهشتی مثلث‌ها و بررسی بدفهمی‌های آنها در هر سطح سولو و به روش توصیفی-پیمایشی انجام شده است. جامعه آماری این پژوهش را دانش‌آموزان دختر پایه هشتم مدارس دولتی ناحیه ۲ قم تشکیل دادند که با توجه به حجم جامعه براساس جدول مورگان، ۲۶۵ دانش‌آموز به عنوان نمونه و به روش نمونه‌گیری تصادفی خوشه‌ای انتخاب شدند. ابزار اندازه‌گیری آزمونی محقق‌ساخته شامل شش مسئله در سطوح مختلف طبقه‌بندی سولو بود که پایایی آن با استفاده از آلفای کرونباخ (۰/۷۴۴) تایید شد. شاخص روایی محتوای ابزار نیز برابر با ۰/۹۲ بدست آمد که نشان‌دهنده روایی مناسب آزمون بود. تجزیه و تحلیل داده‌ها با استفاده از آمار توصیفی و آمار استنباطی انجام شد. نتایج پژوهش نشان داد که حدود ۷۷ درصد دانش‌آموزان به مسائلی از آزمون در سطح تک‌ساختاری، حدود ۴۵ درصد به مسائلی در سطح چندساختاری و حدود ۳۵ درصد به مسائلی در سطح رابطه‌ای سولو، توانستند پاسخ درست بدهند. بنابراین، سطح تفکر اغلب آنها در سطح تک‌ساختاری بود. همچنین، نتایج نشان داد که دانش‌آموزان بدفهمی‌های متعددی در هر سطح سولو درخصوص مفهوم هم‌نهشتی مثلث‌ها دارند. نتایج این پژوهش می‌تواند معلمان، به‌ویژه معلمان که علاقه‌مند به تدریس درس هندسه هستند را در ارتباط با تعیین سطح تفکر هندسی دانش‌آموزان و آگاهی از بدفهمی‌های آنها در هر سطح سولو درخصوص مفهوم هم‌نهشتی مثلث‌ها یاری نماید. همچنین این نتایج می‌تواند برای طراحی ابزارهای ارزیابی دقیق و ارائه بازخوردهای هدفمند به دانش‌آموزان مورد استفاده قرار گیرد.

کلیدواژه‌ها: تفکر هندسی، نظریه سولو، هم‌نهشتی مثلث‌ها، پایه هشتم.

Identifying the level of geometric thinking of eighth grade students: A study applying the SOLO taxonomy

Afsaneh Mohabatpanah*

Narges Yaftian**

*Mathematics teacher and Ph.D. student in Mathematics Education, Department of Mathematics, Faculty of Science, Shahid Rajaei Teacher Training University, Tehran, Iran. afsanehmohabatpanah@gmail.com

**Corresponding author, Associate Professor, Department of Mathematics, Faculty of Science, Shahid Rajaei Teacher Training University, Tehran, Iran. yaftian@stru.ac.ir

Abstract

This study aimed to examine the geometric thinking levels of eighth-grade students, based on the SOLO taxonomy using the concept of congruent triangles, and to assess their misconceptions at each SOLO level, employing a descriptive-survey method. The statistical population included all female eighth-grade students from public schools in District 2 of Qom city. Considering the size of the population based on the Morgan table, 265 students were selected as the sample using cluster random sampling method. Test measurement tool was the researcher-made test consisting of 6 problems at various SOLO taxonomy levels, its reliability was determined using Cronbach's alpha of 0.744. The content validity index (CVI) of the tool was found to be 0.92, which demonstrates acceptable validity of the test. Data analysis was performed using descriptive statistics and inferential statistics. The research results indicated that about 77% of students were able to correctly answer questions at the uni-structural level, approximately 45% for multi-structural level questions, and around 35% for questions involving relational SOLO level. Therefore, most of their thinking was at the uni-structural level. Also, the results showed that students have many misconceptions in each SOLO level regarding the concept of congruent triangles. The results of this study can help teachers, especially teachers who are interested in teaching geometry, in determining students' geometric thinking levels, becoming aware of their common misconceptions at each SOLO level regarding the concept of congruent triangles. These results can also be used for designing accurate assessment tools and providing targeted feedback to students.

Keywords: Geometric thinking, SOLO theory, congruent triangles, eighth grade.

مقدمه

بسیاری از مشکلات در فرایند یاددهی و یادگیری هندسه از آن جا ناشی می‌شود که معلمان اغلب با توجه به ترجیحات خود و بدون توجه به تفاوت‌های فردی، تنها برای دسته‌ای خاص از دانش‌آموزان، آموزش می‌دهند و عده زیادی را با سطوح تفکر مختلف نادیده می‌گیرند (بازگیر و همکاران، ۱۴۰۰). به عبارت دیگر، عدم هماهنگی در سطوح تفکر هندسی معلمان و دانش‌آموزان، از عوامل تأثیرگذار بر چالش‌های یاددهی و یادگیری هندسه است (فن‌هیلی^۱، ۱۹۸۶).

یکی از اساسی‌ترین مفاهیم هندسه مدرسه‌ای مفهوم مثلث است که به دلیل پیچیدگی درک این مفهوم و مفاهیم مرتبط با آن مانند مقایسه ویژگی‌های انواع مثلث، رابطه فیثاغورس و هم‌نهشتی مثلث‌ها، بسیاری از دانش‌آموزان قادر نیستند مسائل آن را به درستی درک و حل کنند (الغدیری و هرمان^۲، ۲۰۱۸). مفهوم هم‌نهشتی مثلث‌ها از جمله مفاهیم چالش‌برانگیز هندسه به شمار می‌آید و دانش‌آموزان، به ویژه آنان که در اثبات و استدلال‌های هندسی عملکرد پایینی دارند، در درک و اثبات آن با چالش‌های بیشتری مواجه هستند (جونز^۳ و همکاران، ۲۰۱۳، به نقل از شهبازی و داهر^۴، ۲۰۲۰)، به همین دلیل، به یادگیری حفظی و طوطی‌وار آن روی می‌آورند که همین امر موجب بروز خطاها و بدفهمی‌هایی در مواجهه با حل مسائل هندسی مرتبط با مفاهیم هم‌نهشتی مثلث‌ها می‌شود. مثال‌های متنوعی از بدفهمی‌های رایج دانش‌آموزان در هندسه وجود دارد که ریشه بسیاری از آنها به سطح تفکر و شیوه استدلال هندسی آنها برمی‌گردد (وانگ^۵ و همکاران، ۲۰۱۸). بنابراین، آگاهی از سطح تفکر هندسی دانش‌آموزان و ارائه آموزش‌های هدفمند و متناسب با آن، امری ضروری و بنیادین به نظر می‌رسد.

از جمله نظریه‌هایی که می‌تواند برای تعیین سطح تفکر دانش‌آموزان (اولیبال و مانسرا^۶، ۲۰۲۵؛ پگ^۷ و همکاران، ۱۹۹۸؛ پوتری^۸ و همکاران، ۲۰۱۷)، بررسی سطح توانایی حل مسئله آنها (ساپوترا^۹ و همکاران، ۲۰۱۹) و تجزیه و تحلیل خطاهایشان، به کمک تجزیه و تحلیل پاسخ‌های آنان به مسائل، مورد استفاده قرار گیرد، نظریه «ساختار نتایج یادگیری مشاهده شده^{۱۰}» یا به اختصار سولو است که توسط بیگز و کولیس^{۱۱} (۱۹۸۲) به عنوان ابزاری برای ارزیابی کیفیت پاسخ‌های فراگیران در حل یک مسئله یا تکلیف ابداع شده است (کریستینو و مامپوو^{۱۲}، ۲۰۱۹؛ آيسا و رتنوواتی^{۱۳}، ۲۰۲۴). «نتایج یادگیری» اشاره به حقایقی دارد که نشان می‌دهد در نهایت فراگیران چه چیزی را خواهند دانست، چه چیزی را مورد اهمیت قرار خواهند داد و قادر به انجام آن خواهند بود که این نتایج، هدف‌های قابل ارزیابی آموزش هستند. منظور از عبارت «نتایج یادگیری قابل مشاهده» پاسخ‌هایی است که فراگیران به مسائل یا تکالیف می‌دهند. همچنین، «ساختار نتایج یادگیری قابل مشاهده» پاسخ‌های فراگیران را براساس دو ویژگی کدگذاری می‌کند؛ یکی براساس نوع تفکر و دیگری براساس کیفیت پاسخ است (بیگز و کولیس، ۱۹۸۰، به نقل از حق‌جو و ریحانی، ۱۳۹۸).

محوریت سولو بر این دیدگاه است که مراحل طبیعی متعددی در رشد یادگیری هر مهارت یا موضوع پیچیده، وجود دارد. این مراحل با مراحل رشد پیاژه^{۱۴} مشابه هستند، اما یکسان نیستند. بر این اساس، نوع تفکر فرد با استفاده از پنج حالت رشد شناختی عمومی، تحت عنوان‌های حسی- حرکتی، تصویری، عینی- نمادین، صوری و فراصوری معرفی می‌شود که یکی از ویژگی‌های طبقه‌بندی سولو است. ویژگی دیگر، سطوح پاسخ یا توانایی فرد در پاسخگویی است که به پنج سطح پیش‌ساختاری، تک‌ساختاری، چندساختاری، رابطه‌ای و انتزاع تعمیم‌یافته^{۱۵} طبقه‌بندی می‌شود و مربوط به چارچوب موضوعی رشد شناختی فرد، یعنی جنبه‌ای از رشد شناختی که به توسعه راه‌های کیفی ارتقا تفکر و جنبه‌های مفهومی در افزایش مهارت و توانایی در استفاده از اطلاعات و ایجاد ارتباط می‌پردازد (پگ و تال^{۱۶}، ۲۰۰۵). پاسخ فرد با افزایش پیچیدگی در ساختار آن به سطوح بالاتری می‌رسد، زیرا طبقه‌بندی سولو سطوح درک تدریجی را توصیف می‌کند. در واقع این ویژگی، توصیفی سلسله مراتبی در مورد ساختار و کیفیت یک پاسخ ارائه می‌دهد (کانگلیا و میدوز^{۱۷}، ۲۰۱۸). اهمیت این نظریه در این است که می‌تواند در همه سنین و مقاطع تحصیلی از جمله مدرسه و دانشگاه، درک و فهم یادگیرنده از یک موضوع را با توجه به کیفیت پاسخ آنها، مورد ارزیابی قرار دهد و به مدرس کمک کند که پاسخ‌های فراگیران را براساس نوع تفکر و سطح پاسخ آنها طبقه‌بندی کند (آيسا و رتنوواتی، ۲۰۲۴). لازم به ذکر است که تمرکز

پژوهش حاضر نیز بر ویژگی کیفیت پاسخ‌های ارائه شده توسط دانش‌آموزان، است. سطوح پنجگانه پاسخ در طبقه‌بندی سولو به همراه توصیف آنها در ذیل ارائه شده است:

- **پیش‌ساختاری:** در سطح پیش‌ساختاری یادگیرنده برای پاسخ به مسئله از اطلاعات یا روند حل اشتباه و نامرتب استفاده می‌کند، بنابراین نتیجه‌گیری‌های او نادرست یا بی‌ربط می‌شود (مولبار^{۱۸} و همکاران، ۲۰۱۷). حتی در بعضی از موارد یادگیرنده ممکن است کمبود دانش خود را با روش‌هایی پنهان کند. برای مثال، می‌توان به استفاده از یک مسئله دیگر و غیرمرتبط برای پاسخ دادن به مسئله داده شده یا فقط تکرار اطلاعات صورت مسئله اشاره کرد (برابراند و دال^{۱۹}، ۲۰۰۸؛ کانینگلیا و میدوز، ۲۰۱۸). در این سطح، اکثر خطاهای یادگیرندگان، خطاهای مربوط به درک اولیه مسئله هستند (کریستینو و مامپوو، ۲۰۱۹).

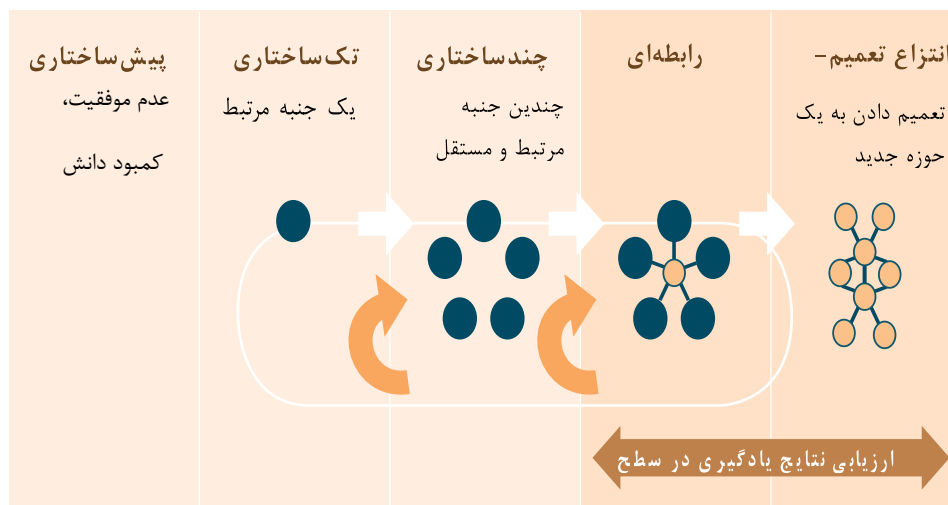
- **تک‌ساختاری:** در سطح تک‌ساختاری، یادگیرنده ممکن است دانش محدودی در مورد موضوع داشته باشد به عنوان مثال، او از یک جنبه اطلاعات برای پاسخگویی به مسئله استفاده می‌کند، اما ارتباطی بین ایده‌ها و اطلاعات مختلف مسئله نمی‌بیند. در این سطح، یادگیرنده ممکن است به خاطر سپردن ایده‌ها و مفاهیم را به شیوه‌ای رویه‌ای و از پیش تعیین شده انجام دهد و حقایق/مفاهیم را به صورت مجزا ارائه کند (کانینگلیا و میدوز، ۲۰۱۸). بارزترین خطاها در سطح تک‌ساختاری، خطاهای مربوط به درک مفاهیم، اصول و استفاده از مهارت‌های مختلف است (روماسورنگ و سوگیمن^{۲۰}، ۲۰۱۴).

- **چندساختاری:** در سطح چندساختاری یادگیرنده از چند جنبه اطلاعات استفاده می‌کند تا منجر به راه‌حل شود، اما نمی‌تواند رابطه بین آنها را درک کند (اوزدمیر و گوک‌تپه ییلدیز^{۲۱}، ۲۰۱۵؛ مولبار و همکاران، ۲۰۱۷). در این سطح، فرد در فرایند پردازش و استفاده از اطلاعات با خطا مواجه است. شاخص خطا در سطح چندساختاری این است که فرد قسمت‌هایی از حل یک مسئله را انجام می‌دهد اما نمی‌تواند با دانسته‌های قبلی خود ارتباط دهد (کریستینو و مامپوو، ۲۰۱۹).

- **رابطه‌ای:** در سطح رابطه‌ای، فرد قادر است قسمت‌های مختلف مسئله، اعم از پنهان و آشکار را درک کند و موفق به تلفیق آنها شود و مفاهیم را برای وضعیت‌های دیگر یا مسائل مشابه در آینده استفاده می‌کند، البته با این وجود نمی‌تواند آنها را به حوزه دیگری انتقال دهد (کانوکا^{۲۲}، ۲۰۱۱، به نقل از ستین و ایلهان^{۲۳}، ۲۰۱۷).

- **انتزاع تعمیم‌یافته:** در سطح انتزاع تعمیم‌یافته، فرد فراتر از داده‌های مورد استفاده در مسئله می‌اندیشد و زمانی که به یک راه‌حل می‌رسد آن را به مسئله یا حوزه دیگری تعمیم می‌دهد، همچنین وی می‌تواند سبک‌های تفکر جدید ایجاد کند (اوزدمیر و گوک‌تپه ییلدیز^{۲۴}، ۲۰۱۵).

بیگز و کولیس (۱۹۸۲) برای صورت‌بندی نتایج یادگیری قابل مشاهده که همان پاسخ‌های متنوع افراد به مسائل است چرخه‌ای در مدل سولو ارائه داده‌اند. از جمله پژوهشگرانی که این چرخه را به همراه ویژگی‌های هر سطح به تصویر کشیدند، گاف^{۲۴} و همکاران (۲۰۱۴) هستند که پنج سطح کیفیت پاسخ و ارتباط بین بعضی از آنها به شکل سطوح چرخه یادگیری در شکل ۱، ارائه شده است.



شکل ۱: سطوح ارزیابی نتایج یادگیری در طبقه‌بندی سولو (اقتباس از گاف و همکاران، ۲۰۱۴)

براساس شکل ۱، چارچوب رشد شناختی موضعی در طبقه‌بندی سولو شامل چرخه‌ای بازگشتی از سه سطح تک‌ساختاری، چندساختاری و رابطه‌ای است. شرح چرخه یادگیری بدین صورت است که سطح پیش‌ساختاری مرحله قبل از یادگیری است و شروع توالی مراحل این چرخه، از تک‌ساختاری به رابطه‌ای رخ می‌دهد که در آن، درک یادگیرنده ارتقا می‌یابد و عمیق‌تر می‌شود. فرد ممکن است نیاز داشته باشد چند بار سطوح مختلف را در چرخه یادگیری طی کند، اما هدف این است که با رسیدن به مرحله انتزاع تعمیم‌یافته، به درک عمیق‌تری برسد. افراد ممکن است در نقطه‌های متفاوتی از چرخه یادگیری برای موضوعات مختلف باشند و نکته حائز اهمیت این است که حتی اگر آنها به سطح انتزاع تعمیم‌یافته درباره یک موضوع رسید باشند، ممکن است در مواجهه با اطلاعات جدیدی که درک آنها را متزلزل می‌کند، سیر نزولی داشته باشند و به مراحل قبل بازگردند. براساس این چرخه، سطوح پاسخ تک‌ساختاری و چندساختاری در مرحله تفکر کمی (عینی^{۲۵})، یعنی مرحله کسب اطلاعات بیشتر، گنجانده شده و سطوح پاسخ رابطه‌ای و انتزاع تعمیم‌یافته به عنوان مرحله تفکر کیفی (انتزاعی^{۲۶})، یعنی تغییر در درک و ایجاد معنای جدیدی از اطلاعات، طبقه‌بندی شده‌اند (گاف و همکاران، ۲۰۱۴).

در مجموع، با استفاده از مشخصه‌های هر یک از این پنج سطح از طبقه‌بندی سولو، سطح تفکر دانش‌آموزان به کمک پاسخی که به تکالیف ارائه می‌دهند، مشخص می‌شود. البته، اگر چه این پنج سطح اساسی در چرخه یادگیری قابل تشخیص است، اما سه سطح میانی جزو اهداف برنامه آموزشی مدرسه‌ای و اولین و آخرین سطح، خارج از آن قرار می‌گیرند. زیرا پاسخ‌های پیش‌ساختاری برای یک تکلیف، خیلی نامرتبط و در سطحی بیش از حد پایین است. از طرفی، پاسخ‌های در سطح انتزاع تعمیم‌یافته، فراتر و انتزاعی‌تر از آن است که در حال حاضر جزو اهداف آموزشی مدرسه قرار بگیرد (اسلان^{۲۷}، ۲۰۲۳؛ بیگز و کولیس، ۱۹۸۹) و براساس ادبیات پژوهش، محققان نیز این نکته را بررسی کرده و نشان داده‌اند که اکثر دانش‌آموزان مقطع متوسطه اول به سطح انتزاع تعمیم‌یافته سولو نمی‌رسند (بیگز و کولیس، ۱۹۸۹؛ پگ، ۲۰۱۱؛ ساپوترا و همکاران، ۲۰۱۹؛ ستین و ایلهان، ۲۰۱۷؛ هندایانی^{۲۸} و همکاران، ۲۰۲۳). بنابراین، از سه سطح میانی می‌توان برای تعیین یک نقطه آغاز و یک نقطه پایانی مطلوب و معیار ارزیابی برای تعیین اهداف یادگیری در آموزش مدرسه‌ای استفاده کرد (پاور^{۲۹}، ۱۹۸۶؛ به نقل از بیگز و کولیس، ۱۹۸۹).

با بررسی ادبیات پژوهش، مطالعات متعددی در ارتباط با تفکر هندسی یا درک هندسی دانش‌آموزان انجام شده است که تمرکز بیشتر این پژوهش‌ها براساس سطوح تفکر هندسی فن‌حیلی است. از طرفی در بعضی مطالعات، مشاهده می‌شود که از سولو نیز به عنوان یک نظریه رشد در هندسه استفاده شده است (یورتیاپان و ایلماز^{۳۰}، ۲۰۲۱). با این وجود، برخی صاحب‌نظران معتقدند که این

طبقه‌بندی به طور وسیع‌تر و کارآمدتری در قیاس با مدل فن‌هیلی در کمک به تفسیر میزان درک فراگیران در هندسه، عمل می‌کند (پگ و وولی^{۳۱}، ۱۹۹۴؛ پگ و فیت‌فول^{۳۲}، ۱۹۹۵). به عنوان مثال، دوآلو و تورس^{۳۳} (۲۰۰۳) در پژوهشی که به منظور بررسی استدلال هندسی دانش‌آموزان پایه ششم انجام داده‌اند، از تطبیق و مقایسه سطوح طبقه‌بندی فن‌هیلی و سولو استفاده کرده‌اند. دوآلو و تورس در این پژوهش نشان دادند که طبقه‌بندی سولو در مقایسه با سطوح فن‌هیلی، تفسیر دقیق‌تری از یادگیری دانش‌آموزان ارائه می‌دهد، زیرا چرخه‌های یادگیری که در طبقه‌بندی سولو در نظر گرفته شده است، در مدل فن‌هیلی پیش‌بینی نشده است. بنابراین به کمک طبقه‌بندی سولو، نه تنها می‌توان سطح استدلال دانش‌آموزان را شناسایی کرد، بلکه توالی‌هایی که در فرایند یادگیری رخ می‌دهند و تابع چرخه‌های یادگیری هستند نیز قابل مشاهده و تفسیر می‌گردد.

پژوهش‌هایی نیز برای تعیین سطح تفکر هندسی از طبقه‌بندی سولو استفاده کرده‌اند که از میان آنها می‌توان به پژوهش آگوستین^{۳۴} و همکاران (۲۰۱۹) با هدف تعیین و طبقه‌بندی سطح درک دانش‌آموزان در حل مسائل هندسه فضایی به کمک طبقه‌بندی سولو اشاره کرد که بر روی دانش‌آموزانی انجام شده است که مباحث هندسه تحلیلی را فراگرفته بودند. نتایج این پژوهش حاکی از آن است که درک اکثر دانش‌آموزان در حل مسائل هندسه تحلیلی در سطح تک‌ساختاری (۳۹ درصد) و چندساختاری (۵۵ درصد) است. بُسه^{۳۵} و همکاران (۲۰۲۱) در پژوهشی مرتبط با مسائل هندسه تحلیلی، به مطالعه درک ریاضی هفت دانش‌آموز پایه یازدهم از طریق تجزیه و تحلیل به کمک طبقه‌بندی سولو پرداختند و نتایج حاکی از آن بود که هیچ یک از دانش‌آموزان به بالاترین سطح (انتزاع تعمیم‌یافته) نرسیدند. همچنی

ن تعداد کمی از پاسخ‌ها در پایین‌ترین سطح (پیش‌ساختاری) مشاهده شد. به نظر بُسه و همکاران (۲۰۲۱) این نتایج ممکن است به این دلیل باشد که شرکت‌کنندگان این پژوهش در مقطع دبیرستان بودند، پس به سطح تسلطی فراتر از پایین‌ترین سطح دست یافته‌اند ولی هنوز به حداکثر توانایی یادگیری ریاضی خود نرسیده و در بالاترین سطح، قرار نگرفته‌اند.

از جمله پژوهش‌هایی که براساس طبقه‌بندی سولو در پایه هشتم انجام شده است، می‌توان به پژوهش ساپوترا و همکاران (۲۰۱۹) اشاره کرد. نتایج این پژوهش بیانگر این نکته بود که اکثر دانش‌آموزان با توانایی بالا در ریاضی در سطح چندساختاری و دانش‌آموزان با توانایی پایین در ریاضی در سطح تک‌ساختاری سولو قرار دارند. همچنین هندایانی و همکاران (۲۰۲۳) پژوهشی با هدف تعیین سطح تفکر دانش‌آموزان پایه هشتم براساس طبقه‌بندی سولو در حل مسائل ریاضی از نظر سبک‌های یادگیری دیداری، شنیداری و حرکتی انجام دادند. نتایج این پژوهش، نشان داد که اکثر دانش‌آموزان با سبک یادگیری دیداری در سطح تک‌ساختاری، با سبک یادگیری شنیداری در سطح چندساختاری و با سبک یادگیری حرکتی در سطح رابطه‌ای سولو قرار دارند.

از جمله پژوهش‌های داخلی که در حوزه آموزش ریاضی و طبقه‌بندی سولو در سال‌های اخیر انجام شده است می‌توان به پژوهش آزمایشی خواجه‌حسنی (۱۴۰۰) با هدف شناسایی و کاهش بدفهمی‌های دانش‌آموزان در سه مبحث عبارت‌های جبری، نامعادله و عبارت‌های گویا از طریق آموزش براساس طبقه‌بندی سولو اشاره کرد. نتایج حاصل از گروه کنترل و گروه آزمایش این پژوهش نشان داد که آموزش براساس طبقه‌بندی سولو در کاهش بدفهمی‌ها تاثیر معنادار دارد و به معلم در شناسایی بدفهمی‌ها و رفع آنها کمک می‌کند. لیلتن (۱۴۰۱) نیز پژوهشی با هدف بررسی دانش محتوای عمومی دانش‌جومعلم‌ان دوره ابتدایی از اثبات براساس نظریه سولو انجام داده است. طبق نتایج آزمون این پژوهش، سطح پاسخ‌های اکثر دانش‌جومعلم‌ان پایین‌تر از سطح چندساختاری، یعنی در سطوح تک‌ساختاری یا پیش‌ساختاری سولو، قرار داشت. از جمله پژوهش‌های داخلی که مرتبط با هندسه و به کمک طبقه‌بندی سولو انجام شده است نیز می‌توان پژوهش کاظم‌نژاد (۱۳۹۹) با هدف طبقه‌بندی دانش هندسی مرتبط با مفاهیم زاویه مرکزی، ظلی، محاطی، چندضلعی منتظم و اوضاع نسبی خط و دایره در بین دانش‌آموزان پایه یازدهم، با استفاده از طبقه‌بندی سولو را بیان کرد. نتایج نشان داد که درصد پاسخ‌های دانش‌آموزان در دو سطح پیش‌ساختاری و رابطه‌ای بیش از سطوح دیگر است. این نتیجه‌گیری از نظر وی به میزان علاقه دانش‌آموزان نسبت به درس هندسه مرتبط است، یعنی بعضی از دانش‌آموزان به هندسه علاقه نشان می‌دهند و تعدادی نیز قادر به ارتباط گرفتن با آن نیستند.

طبق ادبیات پژوهش، مطالعات بسیاری (الازابی و کاجار^{۳۶}، ۲۰۲۰؛ الغدیری و هرمان، ۲۰۱۸؛ اوزرم^{۳۷}، ۲۰۱۲؛ وانگ و همکاران، ۲۰۱۸) حاکی از آن است که دانش‌آموزان در استدلال‌های هندسی و اثبات با چالش‌هایی مواجه هستند. با این حال، پژوهش‌های اندکی با هدف تجزیه و تحلیل چالش‌های استدلال و اثبات در ارتباط با مفهوم مثلث‌های هم‌نهشت انجام شده است. بررسی این‌که دانش‌آموزان چه نوع خطاهایی در استدلال و اثبات در زمینه مثلث‌های هم‌نهشت دارند و این‌که چرا این خطاها را مرتکب می‌شوند، ضروری است. در راستای توسعه محتوای هندسه مدرسه‌ای، استدلال و اثبات با موضوع مثلث‌های هم‌نهشت، نقش بنیادینی در پرورش توانایی ارائه استدلال‌های رسمی ایفا می‌کند؛ چرا که دانش‌آموزان برای اثبات این قضایا ناگزیر به کاربرد زبان نمادین ریاضی، هستند (وانگ و همکاران، ۲۰۱۸).

در مجموع می‌توان گفت که طبقه‌بندی سولو به دلیل ماهیت انعطاف‌پذیر آن، امکان تجزیه و تحلیل عمیق‌تر پاسخ‌های دانش‌آموزان را ارائه می‌دهد و برخلاف مدل تفکر هندسی فن‌هیلی که اغلب در مطالعات هندسی ترجیح داده شده است، سولو به دنبال توصیف و طبقه‌بندی ساختار پاسخ‌های دانش‌آموزان به جای طبقه‌بندی خود دانش‌آموزان و سپس رسیدن به سطح تفکر آنها است. بنابراین، ویژگی که این طبقه‌بندی را متفاوت و برجسته‌تر می‌کند این است که فرایندهای تفکر فرد برای رسیدن به پاسخ مسئله را نیز بررسی می‌کند (بیگز و کولیس، ۱۹۹۱؛ پگ و تال، ۲۰۰۱، به نقل از یورتیپان و ایلماز، ۲۰۲۱). همچنین، طبقه‌بندی سولو یک ابزار ارزیابی مفید است. زیرا این نظریه، پژوهشگران و معلمان را قادر می‌سازد تا درباره خطاها و تصورات نادرست یادگیرندگان، از طریق سطح‌بندی پاسخ‌های آنها، تأمل کنند و سپس روش‌های آموزش و ارزیابی را با هدف تقویت توانایی حل مسئله ریاضی در بین یادگیرندگان اصلاح کنند (نوناک^{۳۸} و همکاران، ۲۰۱۹؛ غنایمت و علونه^{۳۹}، ۲۰۲۴). برای رفع مشکلات یادگیری، لازم است تا بدفهمی‌های دانش‌آموزان شناسایی شوند تا به کمک نظریه‌های مختلف یاددهی و یادگیری تلاش برای کاهش و بهبود آنها صورت گیرد. بر پایه جست‌وجوهای صورت گرفته توسط نویسندگان پژوهش حاضر، پژوهش‌های داخلی مربوط به مقطع متوسطه اول در مبحث هندسه که از طبقه‌بندی سولو استفاده کرده باشند، به ندرت یافت شد، به طور خاص در مفهوم هم‌نهشتی مثلث‌ها، پژوهش داخلی یا خارجی که از طبقه‌بندی سولو بهره برده باشد، مشاهده نشد. در این راستا، پژوهش حاضر بر آن است تا به سوالات زیر پاسخ دهد:

- ۱- سطح تفکر هندسی دانش‌آموزان پایه هشتم براساس طبقه‌بندی سولو در مفهوم هم‌نهشتی مثلث‌ها چیست؟
- ۲- چه بدفهمی‌هایی در هر یک از سطوح طبقه‌بندی سولو در میان دانش‌آموزان پایه هشتم در رابطه با مفهوم هم‌نهشتی مثلث‌ها مشاهده می‌شود؟

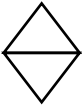
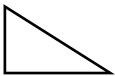
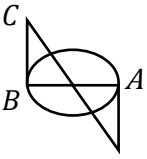
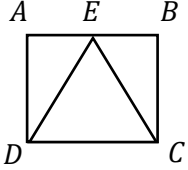
روش پژوهش

مطالعه حاضر یک ارزیابی تکوینی به روش توصیفی از نوع پیمایشی است. جامعه آماری پژوهش شامل تمامی دانش‌آموزان دختر پایه هشتم مدارس دولتی ناحیه دو قم (۹۰۰ نفر) بود که براساس جدول مورگان، حجم نمونه ۲۶۵ نفر برآورد شد و این تعداد به روش نمونه‌گیری تصادفی خوشه‌ای چندمرحله‌ای انتخاب شدند؛ به طوریکه ابتدا از بین مدارس دولتی دخترانه این ناحیه، پنج مدرسه به صورت تصادفی ساده انتخاب شدند. سپس در هر مدرسه منتخب، دو کلاس از پایه هشتم به روش تصادفی ساده انتخاب و تمامی دانش‌آموزان این کلاس‌ها وارد مطالعه شدند. ابزار اندازه‌گیری این پژوهش، یک آزمون تشریحی محقق ساخته شامل ۶ مسئله در سطوح مختلف طبقه‌بندی سولو براساس کتاب درسی پایه هشتم بود. مسائل ۱ و ۲ آزمون در سطح تک‌ساختاری، مسائل ۳ و ۴ در سطح چندساختاری و مسائل ۵ و ۶ در سطح رابطه‌ای سولو طراحی شدند. از آن‌جا که سطح انتزاع تعمیم‌یافته نیاز به تعمیم، فرضیه‌سازی، تأمل، استنتاج و فرایندهای استدلال ترکیبی دارد و پاسخ به مسائل در این سطح ارتباط تنگاتنگی با رشد تفکر انتزاعی

دانش‌آموزان دارد و با توجه به ویژگی‌های رشد شناختی، محققان معتقدند که اگر چه ممکن است تفکر انتزاعی در برخی از دانش‌آموزان پایه هشتم شروع شود، اما هنوز به طور مناسبی به آن تسلط پیدا نکرده‌اند (اردن و آکمن ۲۰۱۱، به نقل از ستین و ایلهان، ۲۰۱۷) و همچنین رسیدن به سطح انتزاع تعمیم‌یافته نیز از اهداف مقطع متوسطه اول نیست (بیگز و کولیس، ۱۹۸۹)، بنابراین مسئله‌ای در این سطح در آزمون پژوهش طراحی نشد.

پیش از اجرای نهایی آزمون پژوهش، یک مرحله اجرای آزمایشی انجام شد. با توجه به مدت زمان مشاهده شده در این مرحله، زمان آزمون برای اجرای نهایی ۴۰ دقیقه تعیین شد. قبل از آغاز آزمون، دبیر هر کلاس یا پژوهشگر دستورالعمل‌های لازم را برای دانش‌آموزان تشریح کرد که مهم‌ترین مورد آن، تأکید بر نوشتن کامل تمامی مراحل و جزئیات راه‌حل‌ها بود. همچنین، به دانش‌آموزان اعلام شد که مسائل آزمون منطبق با مباحث کتاب درسی طراحی شده است. در پایان نیز به تمامی شرکت‌کنندگان اطمینان داده شد که اطلاعات فردی آنان (مانند نام) محرمانه باقی خواهد ماند. در ادامه، در جدول ۱ مسائل آزمون و اهداف آنها بیان شده است.

جدول ۱: مسائل آزمون پژوهش

شماره	مسئله	هدف مسئله	سطح
۱	دو مثلث زیر متساوی‌الاضلاع هستند. اگر هم‌نهشت نیستند، چرا؟ و اگر هم‌نهشت‌اند، بنا بر چه حالتی؟ 	ویژگی مثلث متساوی‌الاضلاع مبنی بر داشتن سه ضلع مساوی، تشخیص حالت هم‌نهشتی ض ض ض.	تک‌ساختاری
۲	در شکل زیر، بعضی از اجزای مساوی مشخص شده‌اند. آیا دو مثلث باهم هم‌نهشت‌اند؟ اگر هم‌نهشت هستند بنابر چه حالتی؟ 	تشخیص دو زاویه متقابل به رأس و برابر در نظر گرفتن آنها، تشخیص حالت هم‌نهشتی ض ض ض.	تک‌ساختاری
۳	در شکل زیر، ضلع‌ها و زاویه‌های مساوی مشخص شده‌اند. آیا اطلاعات داده شده برای تشخیص هم‌نهشتی دو مثلث کافی است یا خیر؟ اگر دو مثلث هم‌نهشت‌اند، حالت هم‌نهشتی را نیز بنویسید. 	تشخیص شرایط لازم برای هم‌نهشتی دو مثلث قائم‌الزاویه. هم‌نهشتی دو مثلث قائم‌الزاویه.	چندساختاری
۴	با توجه به شکل زیر، دلیل و حالت هم‌نهشتی دو مثلث BOC و AOD را بنویسید. 	تشخیص شرایط لازم برای هم‌نهشتی دو مثلث قائم‌الزاویه، تشخیص دو زاویه متقابل به رأس و برابر در نظر گرفتن آنها، تشخیص حالت هم‌نهشتی ز ض ز.	چندساختاری
۵	$ABCD$ مربع و DEC مثلث متساوی‌الساقین است. آیا دو مثلث DAE و CBE با هم هم‌نهشت‌اند؟ چرا و بنابر بر چه حالتی؟ و اگر هم‌نهشت نیستند، چرا؟ 	تشخیص ویژگی‌های مثلث متساوی‌الساقین و مربع، تشخیص حالت‌های هم‌نهشتی و ز، و ض، ز ض، ز ض و ض و ض شرایط آنها.	رابطه‌ای

۶	برای درستی جمله زیر دلیل خود را کامل بنویسید. « هر نقطه روی نیمساز یک زاویه از دو ضلع زاویه به یک فاصله است.» OM نیمساز زاویه است 	درک مفهوم نیمساز و فاصله یک نقطه از خط، تشخیص حالت هم‌نهشتی و ض از طریق کامل کردن درست شکل، نوشتن اجزای متناظر.
---	---	--

برای بررسی روایی صوری ابزار، از نظرات و دیدگاه‌های صاحب‌نظران و اساتید آموزش ریاضی و معلمان ریاضی بهره گرفته شد. شاخص روایی محتوا (CVI) با نظرات پنج متخصص آموزش ریاضی محاسبه شد که میانگین آن ۰/۹۲ به‌دست آمد و بیانگر روایی محتوایی قابل قبول ابزار پژوهش بود. پایایی ابزار پژوهش نیز با استفاده از روش آلفای کرونباخ بررسی شد. براساس پژوهش ستین و ایلهان (۲۰۱۷)، برای امتیازدهی پاسخ‌های دانش‌آموزان بر مبنای سطوح طبقه‌بندی سولو، برای محاسبه پایایی ابزار پژوهش، امتیاز ۰ برای بدون پاسخ، امتیاز ۱ برای پاسخ‌های سطح پیش‌ساختاری، امتیاز ۲ برای پاسخ‌های سطح تک‌ساختاری، امتیاز ۳ برای پاسخ‌های سطح چندساختاری، امتیاز ۴ برای پاسخ‌های سطح رابطه‌ای در نظر گرفته شد. ضریب پایایی ابزار پژوهش به کمک آلفای کرونباخ ۰/۷۴۴ به‌دست آمد که بیانگر پایایی مورد قبول آن است. برای تحلیل پاسخ‌های دانش‌آموزان و تفکر هندسی آنها براساس پژوهش‌های مرتبط و با در نظر گرفتن سطوح طبقه‌بندی سولو، سطح پاسخ‌های دانش‌آموزان به مسائل آزمون، به صورت ارائه شده در جدول ۲، در نظر گرفته شد.

جدول ۲: چارچوب مربوط به اختصاص پاسخ‌های دانش‌آموزان به سطوح طبقه‌بندی سولو

مسئله	سطوح سولو	پاسخ‌های دانش‌آموزان
۱	پیش‌ساختاری	پاسخ‌های نامرتب و غلط از قبیل بیان ویژگی‌های غلط در مورد مثلث متساوی‌الاضلاع، عدم درک مفهوم هم‌نهشتی و نوشتن پاسخی نامرتب با هم‌نهشتی مثلث‌ها، هر پاسخ نادرست به مسئله.
	تک‌ساختاری	هر پاسخ کاملاً درست به مسئله.
۲	پیش‌ساختاری	پاسخ‌های نامرتب و غلط از قبیل بیان این‌که دو مثلث هم‌نهشت نیستند (عدم درک مفهوم هم‌نهشتی)، بیان حالت اشتباه هم‌نهشتی دو مثلث.
	تک‌ساختاری	هر پاسخ کاملاً درست به مسئله.
۳	پیش‌ساختاری	پاسخی کاملاً نامرتب با مسئله بدون درک مفهوم هم‌نهشتی دو مثلث.
	تک‌ساختاری	پاسخ‌های نادرستی که حالت هم‌نهشتی وتر و یک زاویه تند و یا وتر و یک ضلع (بدون توجه به تند بودن زاویه و یا عدم تشخیص وتر از ضلع زاویه قائمه در مثلث قائم‌الزاویه) را بیان کرده باشند.
	چندساختاری	هر پاسخ کاملاً درست به مسئله.
۴	پیش‌ساختاری	پاسخ‌های کاملاً نامرتب با مسئله (استفاده از معادله، محاسبه مساحت مثلث و غیره).
	تک‌ساختاری	پاسخ‌های ناقص و نادرستی که فقط یک جنبه از مسئله را در نظر گرفته، مثلاً فقط به برابری شعاع‌ها در دایره و یا برابری دو زاویه متقابل به رأس در بیان اثبات هم‌نهشتی خود، اشاره کرده باشند.
	چندساختاری	هر پاسخ کاملاً درست به مسئله.
۵	پیش‌ساختاری	پاسخی کاملاً نامرتب با مسئله بدون درک مفهوم هم‌نهشتی دو مثلث.
	تک‌ساختاری	پاسخ‌های ناقص و نادرستی که فقط یک جنبه از مسئله را در نظر گرفته، مثلاً به تساوی ضلع‌های مربع و یا تساوی ساق‌های مثلث متساوی‌الساقین در بیان هم‌نهشتی خود، اشاره کرده باشند.
	چندساختاری	پاسخ‌های نادرستی که در بیان حالت هم‌نهشتی و یا علت هم‌نهشتی دچار اشتباه شده‌اند (مثلاً به بین بودن زاویه در حالت هم‌نهشتی دو ضلع و زاویه بین توجه‌ای نداشته‌اند).
	رابطه‌ای	هر پاسخ کاملاً درست به مسئله.
۶	پیش‌ساختاری	پاسخی کاملاً نامرتب با مسئله بدون درک مسئله.
	تک‌ساختاری	پاسخ‌های ناقص و نادرستی که فقط یک جنبه از مسئله را در نظر گرفته، مثلاً فقط به ویژگی نیمساز و یا فاصله یک نقطه از خط اشاره کرده باشد.
	چندساختاری	پاسخ‌هایی که به علت کامل کردن نادرست شکل، اثبات نادرستی نیز برای هم‌نهشتی دو مثلث در نظر گرفته باشند.

رابطه‌ای	هر پاسخ کاملاً درست به مسئله.
----------	-------------------------------

با الهام از پژوهش ستین و ایلهان (۲۰۱۷) در پژوهش حاضر برای هر مسئله، پاسخ درست در سطح طراحی شده و پاسخ‌های نادرست در سطوح پایین‌تر سولو دسته‌بندی می‌شود. بر این اساس، برای مسائل ۱ و ۲ که در سطح تک‌ساختاری طراحی شده‌اند، پاسخ درست در سطح تک‌ساختاری و پاسخ‌های نادرست در سطح پیش‌ساختاری قرار می‌گیرد. در مورد مسائل ۳ و ۴ با سطح چندساختاری، پاسخ درست در سطح چندساختاری و پاسخ‌های نادرست در سطوح تک‌ساختاری و پیش‌ساختاری طبقه‌بندی می‌شوند. همچنین برای مسائل ۵ و ۶ که در سطح رابطه‌ای طراحی شده‌اند، پاسخ درست در سطح رابطه‌ای و پاسخ‌های نادرست در سطوح چندساختاری، تک‌ساختاری و پیش‌ساختاری مورد تحلیل قرار می‌گیرند.

با استفاده از سطح‌بندی پاسخ‌ها به صورت بدون پاسخ، پیش‌ساختاری، تک‌ساختاری، چندساختاری، رابطه‌ای، دو مصحح به صورت مستقل پاسخ‌ها را بررسی کردند و ضریب توافق بین آنها با روش کاپای کوهن محاسبه شد و عدد $0/808$ بدست آمد. تجزیه و تحلیل داده‌ها نیز با استفاده از آمار توصیفی (فراوانی و درصد) و همچنین آمار استنباطی (آزمون خی‌دو) به کمک نرم‌افزار SPSS، انجام شد.

نتایج پژوهش

برای پاسخ به سوال اول پژوهش، پاسخ‌های دانش‌آموزان در آزمون مورد بررسی قرار گرفت که در جدول ۳، فراوانی و درصد پاسخ‌گویی دانش‌آموزان به هر مسئله آزمون در سطوح مختلف طبقه‌بندی سولو و نتایج آزمون خی‌دو ارائه شده است.

شماره مسئله	سطح پاسخ / سطح مسئله	بدون پاسخ		پیش‌ساختاری		تک‌ساختاری		چندساختاری		رابطه‌ای		مقدار χ^2	مقدار sig
		فراوانی	درصد	فراوانی	درصد	فراوانی	درصد	فراوانی	درصد	فراوانی	درصد		
۱	تک‌ساختاری	۱۲	۴/۵	۲۰	۷/۵	۲۱۷	۸۱/۹	۱۶	۶/۱			۱۶۳/۷۵۱	$sig < 0.0001$
		۴	۱/۵	۸۵	۳۲/۱	۱۷۶	۶۶/۴					۳۱/۷۲۸	
میانگین درصدها													
۳	چندساختاری	۸	۳	۴۰	۱۵	۹۸	۳۷	۱۱۹	۴۵			۳۹/۰۸۹	
		۹	۳/۴	۷	۲/۶	۱۲۷	۴۸	۱۲۲	۴۶			۱۰۸/۰۰۸	
میانگین درصدها													
۵	رابطه‌ای	۲۳	۸/۷	۲۵	۹/۴	۴۴	۱۶/۶	۶۶	۲۵	۱۰۷	۴۰/۳	۶۱/۵۷۱	
		۶۲	۲۳/۴	۱۸	۶/۸	۵۸	۲۱/۹	۴۹	۱۸/۵	۷۸	۲۹/۴	۳۶/۸۲۶	
میانگین درصدها													

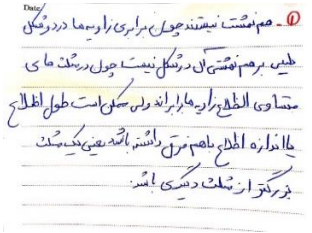
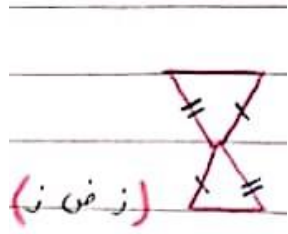
طبق نتایج جدول ۳، به طور میانگین حدود ۳ درصد از دانش‌آموزان به مسائلی در سطوح تک‌ساختاری و چندساختاری و حدود ۳۰ درصد در سطح رابطه‌ای نتوانستند هیچ پاسخی بدهند. این نتیجه بیانگر این مطلب است که در سطوح بالاتر سولو، تعداد دانش‌آموزانی که قادر به پاسخ دادن به مسئله نیستند و مسئله را بدون هیچ پاسخی رها می‌کنند، افزایش می‌یابد. در سطح پیش‌ساختاری، بیش‌ترین پاسخ‌های دانش‌آموزان مربوط به مسئله‌های ۱ و ۲ بود. البته باید توجه داشت که پاسخ درست مسئله‌های ۱ و ۲ در سطح تک‌ساختاری است بنابراین، هر پاسخ نادرستی در سطح پایین‌تر، یعنی پیش‌ساختاری قرار گرفته است. در سطح تک‌ساختاری بیش‌ترین میانگین پاسخ مربوط به مسئله‌های ۱ و ۲ (حدود ۷۴ درصد) است. نکته قابل تأمل در حل مسئله ۱ این بود که علی‌رغم

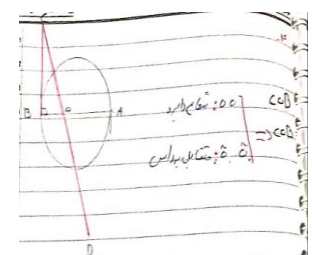
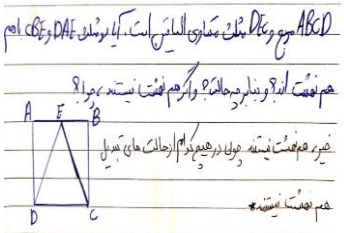
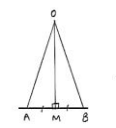
این که پاسخ درست آن در سطح تکساختاری پیش‌بینی شده بود، تعداد اندکی از دانش‌آموزان مسئله را در سطح بالاتر یعنی چندساختاری حل کرده بودند. در سطح چندساختاری بیش‌ترین پاسخ مربوط به مسئله‌های ۳ و ۴ (حدود ۴۵ درصد) است و کم‌ترین درصد پاسخ مربوط به مسئله ۶ (حدود ۲۹ درصد) است. همچنین، بعد از مسائل سطح تکساختاری (مسئله‌های ۱ و ۲) که بالاترین درصد میانگین پاسخ درست را با ۷۴ درصد داشتند، مسائل سطح چندساختاری (مسئله‌های ۳ و ۴) بالاترین میانگین پاسخ درست را با حدود ۴۵ درصد دارند. در سطح رابطه‌ای نیز به طور میانگین ۳۵ درصد دانش‌آموزان توانستند پاسخ درستی به مسئله‌های ۵ و ۶ ارائه بدهند.

در خصوص آمار استنباطی، با توجه به نتایج آماره آزمون χ^2 دو و مقادیر سطح معناداری آزمون بدست آمده برای هر مسئله آزمون پژوهش در سطح معناداری ۰/۰۰۵، می‌توان نتیجه گرفت که تفاوت معناداری بین فراوانی‌های مشاهده شده و فراوانی‌های مورد انتظار در سطح اطمینان ۹۵ درصد وجود دارد. یعنی میزان پاسخگویی سطوح پیش‌ساختاری، تکساختاری، چندساختاری، رابطه‌ای و انتزاع تعمیم‌یافته در هر مسئله آزمون پژوهش یکسان نیست.

برای پاسخ به سوال دوم پژوهش، جهت بررسی خطاها و بدفهمی‌های دانش‌آموزان در حل مسائل در سطوح مختلف سولو، برخی از پاسخ‌های آنان و تحلیل پاسخ‌هایشان به عنوان نمونه ارائه شده است. خطاهای سطح پیش‌ساختاری ناشی از عدم درک مسئله و هدف آن توسط دانش‌آموزان است به طوری که در این سطح دانش‌آموزان در حل مسائل از روش‌هایی استفاده می‌کنند که نامرتب و یا نامشخص است. بیش‌ترین خطاهای انجام شده توسط دانش‌آموزان در سطح پیش‌ساختاری ناشی از خطاهای مربوط به تشخیص و تمایز ضلع از زاویه و زاویه تند از زاویه قائمه، شناسایی ویژگی‌های انواع مثلث و همچنین تشخیص نوع حالت هم‌نهشتی دو مثلث، درک درست از حالت‌های هم‌نهشتی دو مثلث قائم‌الزاویه و اشتباه بیان کردن آن، تشخیص درست اجزا دایره مثل شعاع، مفهوم نیمساز و نوشتن تبدیلات هندسی به جای حالت هم‌نهشتی، بوده است. در جدول ۴ نمونه‌هایی از پاسخ‌های دانش‌آموزان در سطح پیش‌ساختاری، ارائه شده است.

جدول ۴: نمونه پاسخ‌های دانش‌آموزان در سطح پیش‌ساختاری

مسئله	بدفهمی / خطا	نمونه پاسخ	توضیحات مربوط سطح پاسخ در سولو
۱	عدم آگاهی از ویژگی‌های مثلث متساوی‌الاضلاع		دانش‌آموز بیان کرده است که در مثلث متساوی‌الاضلاع فقط سه زاویه برابر هستند و سه ضلع برابر نیستند، در نتیجه پاسخ نادرست و نامرتبیتی به مسئله داده است که در سطح پیش‌ساختاری قرار می‌گیرد.
۲	عدم تشخیص ضلع از زاویه		در این پاسخ دانش‌آموز زاویه را به جای ضلع در نظر گرفته است. برای دانش‌آموز پایه هشتم عدم تشخیص ضلع و زاویه در مثلث و ارائه چنین پاسخی در سطح پیش‌ساختاری است.

۳	عدم درک صحیح حالت‌های هم‌نهشتی دو مثلث		دانش‌آموز یک ضلع و یک زاویه برابر در مسئله دیده و بنابراین حالت (ض ز) را بیان کرده است، در صورتی که چنین حالتی برای هم‌نهشتی دو مثلث وجود ندارد، بنابراین پاسخ وی در سطح پیش‌ساختاری است.
۴	عدم تشخیص درست اجزا دایره مثل شعاع		این پاسخ در سطح پیش‌ساختاری قرار می‌گیرد، زیرا دانش‌آموز شعاع دایره را اشتباه مشخص کرده، در نتیجه نتوانسته است حالت هم‌نهشتی را درست بیان کند.
۵	عدم توجه به داده‌های صورت مسئله و شکل		دانش‌آموز بیان کرده است که دو مثلث هم‌نهشت نیستند، در صورتی که این دو مثلث بنابر چهار حالت هم‌نهشت‌اند. چنین پاسخی در سطح پیش‌ساختاری قرار می‌گیرد، زیرا در آن هیچ جنبه‌ای از فرض‌های مسئله و اطلاعات شکل در نظر گرفته نشده و نتیجه‌گیری شده است که دو مثلث هم‌نهشت نیستند.
۶	عدم درک صحیح از نیمساز و مفاهیم مسئله		دانش‌آموز راجع به عمود منصف نوشته است که مرتبط با مسئله نیست و در واقع پاسخی نامرتبط ارائه داده که سطح پیش‌ساختاری است.

در سطح تک‌ساختاری دانش‌آموز فقط یک جنبه صحیح از مسئله را در نظر می‌گیرد و به جنبه‌های دیگر توجه‌ای ندارد و یا آنها را نادرست بیان می‌کند. بیش‌ترین خطاهای انجام شده توسط دانش‌آموزان در سطح تک‌ساختاری ناشی از خطاهای مربوط به درک درست حالت‌های هم‌نهشتی دو مثلث قائم‌الزاویه، برابر در نظر گرفتن وترهای دو مثلث قائم‌الزاویه بدون دلیل، توجه به این نکته که در حالت ض ز ض از هم‌نهشتی دو مثلث حتماً باید زاویه برابر بین دو ضلع برابر قرار گیرد، تشخیص وتر مثلث قائم‌الزاویه از ضلع زاویه قائمه است، درک درست از شرایط دو زاویه متقابل به رأس و مفهوم فاصله نقطه از خط بوده است. در جدول ۵ نمونه‌هایی از پاسخ‌های دانش‌آموزان در سطح تک‌ساختاری سولو، ارائه شده است. یادآوری می‌شود که با توجه به ماهیت تک‌ساختاری مسائل ۱ و ۲، پاسخ درست به آنها نیز در همین سطح قرار می‌گیرد. بنابراین، این مسائل در جدول ۵ که مختص تحلیل خطاهای سطح تک‌ساختاری است، گنجانده نشده‌اند.

جدول ۵: نمونه پاسخ‌های دانش‌آموزان در سطح تک‌ساختاری

مسئله	بدفهمی/ خطا	نمونه پاسخ	توضیحات مربوط به سطح پاسخ در سولو
-------	-------------	------------	-----------------------------------

۳	عدم درک درست از حالت‌های هم‌نهشتی دو مثلث قائم‌الزاویه	$\hat{B} = \hat{F} = 90^\circ$ $\hat{C} = \hat{E}$ $\overline{BC} = \overline{DF}$
۴	عدم درک شرایط حالت هم‌نهشتی ض ض	$\overline{OB} = \overline{OA}$ $\hat{A} = \hat{B} = 90^\circ$ $\overline{OC} = \overline{OD}$
۵	عدم توجه به شرایط دو زاویه متقابل به رأس (در امتداد بودن اضلاع دو زاویه متقابل به رأس)	$\hat{A} = \hat{B} = 90^\circ$ $\overline{BC} = \overline{DF}$
۶	عدم درک کامل از صورت مسئله و خواسته آن یعنی اثبات	$\hat{A} = \hat{B} = 90^\circ$ $\overline{BC} = \overline{DF}$

در سطح چندساختاری دانش‌آموز می‌تواند بیش از یک جنبه را برای پاسخ دادن به مسئله در نظر بگیرد ولی قادر به ایجاد ارتباط و پیوند بین آنها نیست. در سطح چند ساختاری دانش‌آموزان علاوه بر خطاها و بدفهمی‌های سطوح قبلی در مواردی مانند درک حالت‌های هم‌نهشتی دچار مشکل و بدفهمی بودند و به نظر می‌رسد بعضی از دانش‌آموزان حالت‌های هم‌نهشتی را حفظ کرده‌اند و از علت و شرایط استفاده از آنها آگاهی و درک کافی را ندارند. همچنین آنها از مراحل اثبات و فرایند آن (رسیدن از فرض به حکم توسط استدلال‌های منطقی) آگاهی ندارند و مراحل اثبات را به درستی انجام نمی‌دهند. عدم درک تساوی اجزای متناظر در اثبات هم‌نهشتی مثلث‌ها بدفهمی دیگری بود که در پاسخ‌های در سطح چندساختاری مشاهده شد. در جدول ۶ نمونه‌هایی از پاسخ‌های

دانش‌آموزان در سطح چندساختاری سولو، ارائه شده است. یادآور می‌شویم که مسائل ۳ و ۴ خود در سطح چندساختاری‌اند، لذا در جدول ۶ که مربوط به خطاهای تک‌ساختاری است مسائل ۳ و ۴ قرار نمی‌گیرد، زیرا پاسخ درست آنها در این سطح است.

جدول ۶: نمونه پاسخ‌های دانش‌آموزان در سطح چندساختاری

مسئله	بدفهمی/خطا	نمونه پاسخ	توضیحات مربوط به سطح پاسخ در سولو
۵	عدم آگاهی از علت و شرایط استفاده از حالت-های هم‌نهشتی و درک آنها		در این پاسخ دانش‌آموز چندین جنبه از مسئله را درست در نظر گرفته و برابری آنها را نوشته است (پاسخ در سطح چندساختاری)، اما به هنگام نتیجه‌گیری برای حالت هم‌نهشتی اشتباه کرده است. در واقع دانش‌آموز حالت‌های هم‌نهشتی دو مثلث قائم‌الزاویه را مد نظر خود قرار نداده است.
۶	بدفهمی در تشخیص خواسته‌ها و داده‌های مسئله و استفاده از حکم به جای فرض مسئله		دانش‌آموز به این موضوع توجه کرده که باید از هم‌نهشتی دو مثلث قائم‌الزاویه استفاده کند، اما حکم مسئله ($MH = MH_1$) را به عنوان فرض در نظر گرفته و سپس به حالت هم‌نهشتی اشتباه یعنی وتر و یک ضلع رسیده است.

بحث و نتیجه‌گیری

با توجه به نتایج پژوهش حاضر، دانش‌آموزان پایه هشتم در حل مسائل مرتبط با هم‌نهشتی مثلث‌ها، در سطح تک‌ساختاری و چندساختاری سولو قادر به پاسخگویی هستند و در اکثریت آنها آمادگی لازم برای پاسخ به مسائلی در سطح بالاتر وجود ندارد که این نتیجه‌گیری، نتایج پیشینه پژوهش را نیز تایید می‌کند. برای مثال ساپوترا و همکاران (۲۰۱۹) در پژوهشی که برای بررسی میزان توانایی حل مسئله دانش‌آموزان پایه هشتم از طبقه‌بندی سولو استفاده کردند، نشان دادند که اکثر دانش‌آموزان با توانایی بالا در ریاضی در سطح چندساختاری و دانش‌آموزان با توانایی پایین در ریاضی در سطح تک‌ساختاری سولو قرار دارند. همچنین نتایج پژوهش هندایانی و همکاران (۲۰۲۳) که با هدف تعیین سطح تفکر دانش‌آموزان پایه هشتم در حل مسائل ریاضی براساس طبقه‌بندی سولو انجام شده است، نیز تاییدکننده این موضوع بود که دانش‌آموزان پایه هشتم به سطح تفکر رابطه‌ای و انتزاع تعمیم‌یافته نمی‌رسند. همچنین، در راستای پژوهش‌های مرتبط با درک هندسی پایه هشتم، مطالعه صفابخش (۱۳۹۴) تایید می‌کند که اکثر دانش‌آموزان این پایه در سطوح اول و دوم فن‌هیلی (طبق ادبیات پژوهش معادل سطوح تک‌ساختاری و چندساختاری سولو) قرار دارند و تقریباً هیچ‌یک از آنان به سطح سوم (معادل سطح رابطه‌ای سولو) دست نیافته‌اند. همچنین نتایج پژوهش کاراپینار و ایلهان^{۴۱} (۲۰۱۸) درخصوص سطح درک و تفکر دانش‌آموزان پایه هشتم نیز حاکی از آن بود که اکثریت دانش‌آموزان فقط توانایی پاسخ به مسائلی از آزمون را دارند که در سطح اول فن‌هیلی یعنی تجسم، معادل سطح تک‌ساختاری سولو بود.

بررسی پاسخ‌های دانش‌آموزان به مسائل آزمون پژوهش حاضر که مرتبط با مفهوم هم‌نهشتی مثلث‌ها بوده، بیانگر خطاها و بدفهمی‌های دانش‌آموزان در این مفهوم و مفاهیم مرتبط با آن در هر سطح سولو بوده است که به صورت خلاصه شامل موارد عدم آگاهی از ویژگی‌های انواع مثلث، عدم تشخیص ضلع از زاویه، زاویه‌های تند، قائمه و باز در مثلث و وتر در مثلث قائم‌الزاویه، عدم درک

صحیح از حالت‌های هم‌نهشتی دو مثلث، عدم تمایل به حل مسائلی که نیازمند تغییر و کامل کردن شکل هستند، عدم توجه به حکم مسئله و استفاده از آن در فرایند اثبات، عدم توجه به لزوم این‌که در حالت هم‌نهشتی دو ضلع و زاویه بین، زاویه باید بین همان دو ضلع باشد، یا در حالت دو زاویه و ضلع بین، ضلع باید بین همان دو زاویه باشد، عدم درک لزوم اثبات (مخصوصاً در مسائلی که ظاهر شکل بیانگر هم‌نهشتی و تساوی اجزا است)، عدم مهارت در نوشتن اثبات به صورت رسمی، عدم تشخیص صحیح اجزای متناظر در دو مثلث هم‌نهشت، مشاهده شده است. تحقیقات مشابهی در مورد مفهوم مثلث‌های هم‌نهشت صورت گرفته است که یافته‌های آنها نیز مؤید نتایج بدست آمده از بررسی آزمون پژوهش حاضر بوده است. به عنوان مثال وانگ و همکاران (۲۰۱۸) پژوهشی با هدف تجزیه و تحلیل بدفهمی‌های دانش‌آموزان در اثبات‌های مربوط به مثلث‌های هم‌نهشت، بر روی دانش‌آموزان پایه هشتم انجام داده‌اند که

مقایسه نتایج تجزیه و تحلیل پاسخ‌های دانش‌آموزان در پژوهش آنها و پژوهش حاضر دانش‌آموزان بیانگر این مطلب است که دانش‌آموزان پایه هشتم در درک مفاهیم هندسی و اثبات‌های آنها از جمله مفهوم هم‌نهشتی مثلث‌ها با دشواری‌هایی مواجه‌اند. یکی از بارزترین این دشواری‌ها، عدم درک ضرورت اثبات گزاره‌هایی است که از منظر شهودی برای دانش‌آموزان بدیهی پنداشته می‌شوند. برای مثال، دانش‌آموزان ضرورت ارائه استدلال منطقی برای قضایایی چون هم‌نهشتی مثلث‌ها (مثلاً حالت ض‌ض‌ض) را - که از نظر بصری برای آنها واضح می‌نماید - درک نمی‌کنند.

نتایج پژوهش‌هایی از این دست می‌تواند به آموزشگران و معلمان در به‌کارگیری طبقه‌بندی سولو برای توصیف نتایج یادگیری و ارزیابی در سطوح مختلف شناختی و برنامه‌ریزی در جهت تحقق اهداف مورد انتظار برنامه درسی و استانداردهای شایستگی، کمک کند (نوناک و همکاران، ۲۰۱۹). همسوسازی روش‌های تدریس با نظریه‌های رشد شناختی می‌تواند مهارت‌های ریاضی دانش‌آموزان و نتایج کلی یادگیری را تا حد زیادی افزایش دهد (اولیبال و مانسرا، ۲۰۲۵). سولو زبانی را برای ارزیابی یادگیری دانش‌آموزان فراهم می‌کند و روشی برای تعیین سطح کیفیت در یادگیری است (آیسا و رتنوواتی، ۲۰۲۴). این طبقه‌بندی در آموزش برای نشان دادن سطح شناختی فرد به طور عینی، کمک به معلمان در تجزیه و تحلیل نتایج یادگیری، تعیین سطح پاسخ‌های دانش‌آموزان و تعیین و پیش‌بینی توانایی آنها (ساپوترا و همکاران، ۲۰۱۹) و حتی در تدریس سلسله مراتبی به کمک ویژگی‌های هر سطح آن می‌تواند مورد استفاده قرار گیرد (غنائیم و علونه، ۲۰۲۴). با توجه به نتایج حاصل از پژوهش حاضر مبنی بر سطح تفکر هندسی دانش‌آموزان پایه هشتم در سطوح تک‌ساختاری و چندساختاری سولو و نتایج پژوهش‌های مرتبط که بیانگر سطوح پایین پاسخ‌های دانش‌آموزان بوده است، لزوم ایجاد تناسب بین سطح سولو مورد انتظار از دانش‌آموزان با سطح رشد و تفکر آنان، ضرورت می‌یابد. برای تعیین سطح یادگیرندگان، مدرس با توجه به نتایجی که از ارزیابی‌های مبتنی بر طبقه‌بندی سولو بدست می‌آورد، هم از میزان پیشرفت یادگیری اطلاع حاصل می‌کند و هم نوع تدریس خود را با میزان توانایی و سطح تفکر یادگیرندگان هماهنگ می‌سازد تا بتواند یادگیری را تسهیل و ارتقا ببخشد. در نتیجه با توجه به نتایج پژوهش‌های مرتبط در مقطع‌های مختلف که بیانگر سطوح مختلف پاسخ‌های فراگیران از نظر سطوح طبقه‌بندی سولو است، ایجاد انطباق بین سطح آموزش مدرس با سطح رشد و تفکر فراگیران، نیز احساس می‌شود.

از آن جا که ممکن است دانش‌آموزان در مباحث مختلف هندسی، سطوح متفاوتی از طبقه‌بندی سولو را داشته باشند، پیشنهاد می‌گردد که به منظور ارزیابی دقیق‌تر سطح تفکر هندسی دانش‌آموزان، پژوهش‌هایی با محوریت طبقه‌بندی سولو در سایر مباحث هندسی پایه هشتم و حتی سایر پایه‌های تحصیلی مقطع متوسطه اول انجام شود. همچنین، پیشنهاد می‌شود پژوهش‌های آتی با بهره‌گیری از روش‌شناسی کیفی و از طریق مصاحبه‌های نیمه‌ساختاریافته با دانش‌آموزان انجام شود و هدف از این مصاحبه‌ها، واکاوی عمیق‌تر فرآیندهای فکری، استدلال‌ها و توجیهات آنها در حین حل مسائل هندسی در سطوح مختلف سولو باشد.

سیاسگزاری

این مطالعه با حمایت دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی طبق ابلاغ گزینش شماره ۳۷۴۰۱/۳۹۰۵ انجام گردیده است، بدین وسیله از این دانشگاه تشکر و قدردانی می‌گردد.

- بازگیر، تهمینه، عبدالحسینی، فرشته، و شباک، مریم. (۱۴۰۰). تأثیر فعالیت‌های دست‌ورزی بر یادگیری مهارت‌های هندسه (محیط و مساحت) دانش‌آموزان پسر. *پژوهش در آموزش ریاضی*، ۲(۳)، ۵۱-۶۶. https://journals.cfu.ac.ir/article_2215.html
- حق‌جو، سعید، و ریحانی، ابراهیم. (۱۳۹۸). مطالعه عملکرد دانش‌آموزان دوره دوم متوسطه در حل یک تکلیف توانایی فضایی با استفاده از نظریه سولو. *فناوری آموزش*، ۱۳(۴)، ۶۵۳-۶۳۹. <https://doi.org/10.22061/jte.2018.3687.1918>
- خواجه‌حسنی، پروانه. (۱۴۰۰). شناسایی بدفهمی دانش‌آموزان نهم در مباحث عبارت‌های جبری، گویا و نامعاده و بررسی میزان کاهش این بدفهمی‌ها در چهارچوب طبقه‌بندی سولو [پایان‌نامه کارشناسی ارشد، دانشگاه آزاد اسلامی بندرعباس]. ایران‌داک.
- صفابخش، اشرف. (۱۳۹۴). بررسی سطح درک و استدلال هندسی دانش‌آموزان پایه هشتم بر اساس مدل ون‌هیلی [پایان‌نامه کارشناسی ارشد، دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی تهران]. ایران‌داک.
- کاظم‌نژاد، هادی. (۱۳۹۹). طبقه‌بندی دانش‌آموزان پایه یازدهم رشته ریاضی فیزیک با استفاده از طبقه‌بندی سولو [پایان‌نامه کارشناسی ارشد، دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی تهران]. ایران‌داک.
- لیلتن، علی. (۱۴۰۱). بررسی دانش محتوای عمومی دانش‌جو معلمان دوره‌ی ابتدایی از مفهوم اثبات بر اساس نظریه سولو [پایان‌نامه کارشناسی ارشد، دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی تهران]. ایران‌داک.
- Aesa, L. K., & Retnowati, E. (2024). Developing an assessment based on SOLO taxonomy for junior high school. In *AIP Conference Proceedings* (Vol. 2622, No. 1, p. 080007). AIP Publishing LLC. <https://doi.org/10.1063/5.0133854>
- Agustin, S. A., Sugiatno, S., & Suratman, D. (2019). Pemahaman konseptual siswa dikaji dari taksonomi SOLO dalam materi fungsi eksponensial di SMA. *Jurnal Pendidikan dan Pembelajaran Khatulistiwa*, 8(6), 1-9. <https://doi.org/10.26418/jppk.v8i6.33356>
- Alghadari, F., & Herman, T. (2018). The obstacles of geometric problem-solving on solid with vector and triangle approach. *Journal of Physics: Conference Series*, 1132(1), 012046. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1132/1/012046>
- Aslan, S. A. (2023). Investigation of the learning outcomes in the turkish course curriculum (from 5th grade to 8th grade) in terms of the SOLO taxonomy. *Trakya Eğitim Dergisi*, 13(1), 682-694. <https://doi.org/10.24315/tred.1084426>
- Biggs, J., & Collis, K. (1982). *Evaluating the quality of learning: The SOLO taxonomy*. Academic press.
- Biggs, J., & Collis, K. (1989). Towards a model of school-based curriculum development and assessment using the SOLO taxonomy. *Australian journal of education*, 33(2), 151-163. <https://doi.org/10.1177/168781408903300205>
- Biggs, J., & Collis, K. (1991). Multimodal learning and the quality of intellectual behaviors. In H. A. H. Rowe (Ed.), *Intelligence: Reconceptualization and Measurement* (pp. 57-76). Erlbaum.
- Bossé, M. J., Bayaga, A., Lynch-Davis, K., & DeMarte, A. (2021). Assessing analytic geometry understanding: Van Hiele, SOLO, and Beyond. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*, 22(1), 1-23. <https://doi.org/10.4256/ijmtl.v22i1.274>

- Brabrand, C., & Dahl, B. (2008). Constructive alignment and the SOLO taxonomy: A comparative study of university competences in computer science vs. mathematics. In *Conferences in Research and Practice in Information Technology* (Vol. 88, pp. 3-17). Australian Computer Society. <https://vbn.aau.dk/ws/portalfiles/portal/212444193/CRPITV88Brabrand.pdf>
- Caniglia, J. C., & Meadows, M. (2018). An application of the SOLO taxonomy to classify strategies used by pre-service teachers to solve "one question problems". *Australian Journal of Teacher Education*, 43(9), 75-89. <http://dx.doi.org/10.14221/ajte.2018v43n9.5>
- Çetin, B., & İlhan, M. (2017). An analysis of rater severity and leniency in open-ended mathematic questions rated through standard rubrics and rubrics based on the SOLO taxonomy. *Education and Science*, 42(189), 217-247. <https://doi.org/10.15390/EB.2016.5082>
- Christinove, R. M., & Mampouw, H. L. (2019). A review of SOLO taxonomy on students' errors in high mathematical abilities in calculating definite integral of trigonometric functions. *Al-Jabar: Jurnal Pendidikan Matematika*, 10(1), 11-20. <https://doi.org/10.24042/ajpm.v10i1.3858>
- Doallo, M. E., & Torres, A. L. (2003). Los niveles de Van Hiele y la taxonomía SOLO: Un análisis de las montañas holguineras. *Luz*, 2(1), 1-22. <https://luz.uho.edu.cu/index.php/luz/article/download/23/927>
- Elazzabi, A., & Kaçar, A. (2020). Investigation of Libyan and Turkish students' thinking levels in solving quadratic word problems based on SOLO taxonomy. *Pegem Eğitim ve Öğretim Dergisi*, 10(1), 283-316. <https://orcid.org/0000-0002-4384-8920>
- Ghunaimat, M. A., & Alawneh, E. A. (2024). The effectiveness of using the SOLO taxonomy in acquiring students the concepts of coordinate geometry. *IJORER: International Journal of Recent Educational Research*, 5(3), 523-536. <https://doi.org/10.46245/ijorer.v5i3.592>
- Goff, L., Potter, K. M., & Pierre, E. (2014). *Learning outcomes assessment: A practitioner's handbook*. Higher Education Quality Council of Ontario. <https://heqco.ca/pub/learning-outcomes-assessment-a-practitioner-s-handbook/>
- Handayani, F., Lestari, A., & Thalhah, S. Z. (2023). Analysis of students' thinking level based on SOLO taxonomy in terms of learning style. In *Proceeding International Conference on Religion, Science and Education* (Vol. 2, pp. 249-253). Retrieved from <https://sunankalijaga.org/prosiding/index.php/icrse/article/view/918>
- Hidayatullah, A. (2019). Comparison of processes construct concept of SOLO theory and apos theory in mathematics learning. *Humanities & Social Sciences Reviews*, 7(3), 432-237. <https://doi.org/10.18510/hssr.2019.7363>
- Karapınar, F., & Alp İlhan, O. (2018). An investigation of 8th grade students' knowledge on geometrical objects in terms of van heile levels of understanding geometry. *American Journal of Educational Research*, 6(2), 96-103. <https://dx.doi.org/10.12691/education-6-2-1>
- Mulbar, U., Rahman, A., & Ahmar, A. (2017). Analysis of the ability in mathematical problem-solving based on SOLO taxonomy and cognitive style. *World Transactions on Engineering and Technology Education*, 15(1), 68-73. <https://doi.org/10.26858/wtetev15i1y2017p6873>
- Nunaki, J. H., Damopolii, I., Nusantara, E., & Kandowangko, N. Y. (2019). The contribution of metacognitive in the inquiry-based learning to students' thinking skill based on SOLO taxonomy. *Journal of Physics: Conference Series*, 1321(3), 032044. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1321/3/032044>

- Olaybal, S. G., & Mancera, O. N. (2025). Students' level of understanding in mathematics based on structure of observed learning outcomes taxonomy. *United International Journal for Research & Technology*, 6(8), 31-41. <https://uijrt.com/articles/v6/i8/UIJRTV6I80004.pdf>
- Özdemir, A. S., & Göktepe Yildiz, S. (2015). The analysis of elementary mathematics preservice teachers' spatial orientation skills with SOLO model. *Eurasian Journal of Educational Research*, 61, 217-236. <https://doi.org/10.14689/ejer.2015.61.12>
- Özerem, A. (2012). Misconceptions in geometry and suggested solutions for seventh grade students. *Procedia-Social and Behavioral Sciences*, 55, 720-729. <https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2012.09.557>
- Pegg, J. (2011). Enhancing rural teachers' instructional decision making: An application of the SOLO model. *The Journal of Educational Administration*, 29(2), 1-18. <https://scholar.kyobobook.co.kr/article/detail/4040063533745>
- Pegg, J., & Faithfull, M. (1995). Analysing higher order skills in deductive geometry. In A. Baturo (Ed.), *New directions in geometry education* (pp. 100-105). Queensland University of Technology Press.
- Pegg, J., Gutiérrez, A., & Huerta, P. (1998). Assessing reasoning abilities in geometry. *New ICMI Studies Series*, 5, 275-295. https://doi.org/10.1007/978-94-011-5226-6_9
- Pegg, J., & Tall, D. (2005). The fundamental cycle of concept construction underlying various theoretical frameworks. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 37(6), 468-475. <https://doi.org/10.1007/BF02655855>
- Pegg, J., & Woolley, S. (1994). An investigation of strategies used to solve a simple deductive exercise in geometry. In G. Bell, T. Frigo, T. G. K. Bryce, & B. W. Smith (Eds.), *Proceedings of the 17th Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 471-479). Mathematics Education Research Group of Australasia.
- Putri, U. H., Mardiyana, M., & Saputro, D. R. S. (2017). How to analyze the students' thinking levels based on SOLO taxonomy? *Journal of Physics: Conference Series*, 895 (1), 012031. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/895/1/012031>
- Rumasoreng, M. I., & Sugiman, S. (2014). Analisis kesulitan matematika siswa SMA/MA dalam menyelesaikan soal setara UN di Kabupaten Maluku Tengah. *Jurnal Riset Pendidikan Matematika*, 1(1), 22-34. <https://doi.org/10.21831/jrpm.v1i1.2661>
- Saputra, D. C., Nurjanah, A., & Retnawati, H. (2019). Students' ability of mathematical problem-solving based on SOLO taxonomy. *Journal of Physics: Conference Series*, 1320 (1), 012070. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1320/1/012070>
- Shahbari, J. A., & Daher, W. (2020). Learning congruent triangles through ethnomathematics: The case of students with difficulties in mathematics. *Applied Sciences*, 10(14), 1-20. <https://doi.org/10.3390/app10144950>
- van Hiele, P. M. (1986). *Structure and insight: A theory of mathematics education*. Academic Press.
- Wang, Z., Wang, Z., & An, S. (2018). Error analysis of 8th graders' reasoning and proof of congruent triangles in china. *Journal of Mathematics Education*, 11(2), 85-120. <https://doi.org/10.26711/007577152790029>
- Yurtyapan, M. I., & Yilmaz, G. K. (2021). An investigation of the geometric thinking levels of middle school mathematics preservice teachers according to SOLO taxonomy: "social distance problems". *Participatory Educational Research*, 8(3), 188-209. <https://doi.org/10.17275/per.21.61.8.3>

1 van Hiele
2 Alghadari & Herman
3 Jones
4 Shahbari & Daher
5 Wang
6 Olaybal & Mancera
7 Pegg
8 Putri
9 Saputra
10 Structure of Observed Learning Outcome (SOLO)
11 Biggs & Collis
12 Christinove & Mampouw
13 Aesa & Retnowati
14 Piaget
15 pre-structural, uni-structural, multi-structural, relational, extended abstract
16 Pegg & Tall
17 Caniglia & Meadows
18 Mulbar
19 Brabrand & Dahl
20 Rumasoreng & Sugiman
21 Özdemir & Göktepe Yildiz
22 Kanuka
23 Çetin & İlhan
24 Goff
25 concrete
26 abstract
27 Akti Aslan
28 Handayani
29 Power
30 Yurtyapan & Yilmaz
33 Peg & Woolley
34 Peg & Faithfull
33 Doallo & Torres
34 Agustin
35 Bossé
36 Elazzabi & Kaçar
37 Özerem
38 Nunaki
39 Ghunaimat & Alawneh
40 Erden & Akman
41 Karapınar & İlhan