بررسی سیر تکامل دانش مفهومی و دانش رویّه‌ای ریاضی و رابطه میان آن‌ها*

دکتر ابراهیم ریحانی[1]
شهرناز بخشعلی زاده[2]
و تریفه معینی[3]

چکیده

یکی از عوامل تأثیرگذار بر عملکرد ریاضی دانش‌آموزان، دانش ریاضی آن‌هاست. در سال‌های اخیر، مدل دانش ریاضی، مانند بسیاری از موضوعات دیگر در آموزش ریاضی، تکامل یافته است. مقاله حاضر، پژوهش‌ها و دیدگاه‌های مهم نظری را در مورد دانش مفهومی و دانش رویّه‌ای ریاضی مورد نقد بررسی و قرار می‌دهد. نتایج بررسی، سه دیدگاه اساسی در این حوزه را مشخص کرد.

نخست، مدلی یک بعدی از دانش ریاضی ارائه شد، به طوری که این دانش (در ابتدا) بر اساس نوع به دانش مفهومی و رویّه‌ای دسته‌بندی گردید. با گذشت زمان و نیاز به تغییر این مدل، مدلی دو بعدی از دانش بر اساس نوع و کیفیت و در نهایت مدلی سه بعدی از دانش بر اساس نوع، عمق و آمادگی یادگیری پیشنهاد شد. به علاوه، ایده‌های متفاوتی در مورد رابطه میان این دو دانش مطرح شده است که مهم‌ترین آنان عبارتند از : دیدگاه ناکنش ور، دیدگاه کنش همزمان، دیدگاه برهم‌کنشی پویا، دیدگاه تکوینی و دیدگاه رفت و برگشتی.

بررسی دیدگاه‌های نظری موجود و نیز نتایج پژوهش حاضر نشان می‌دهد مدل سه بعدی از دانش ریاضی، نسبت به سایر مدل‌ها و نیز دیدگاه رفت و برگشتی درباره رابطه میان دانش مفهومی و دانش رویّه‌ای، نسبت به سایر دیدگاه‌ها دلالت کامل‌تری دارد.

* تاریخ دریافت: ۷۸/۳/۶ تاریخ آغاز بررسی: ۷۸/۴/۷۱ تاریخ تصویب: ۸۸/۲/۶۱

۱ـ عضو هیئت علمی دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی. (پست الکترونیکی: e-reyhani @yahoo .com)
۲ـ کارشناس ارشد سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی وزارت آموزش و پرورش.
۳ـ دانشجوی کارشناسی ارشد آموزش ریاضی دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی.

کلید واژه ها: دانش ریاضی، درک، دانش مفهومی، دانش رویّه‌ای

مقدمه

بهبود یادگیری و عملکرد ریاضی دانش‌آموزان، از موضوعات اساسی مورد بحث در حوزه آموزش ریاضی به شمار می‌آید. از این رو پژوهش‌ها عامل‌های گوناگونی را برای دستیابی به این هدف بررسی کرده‌اند. تحقیقات متفاوت در زمینه دانش مفهومی و دانش رویّه‌ای[1] نیز برای افزایش دانش ریاضی دانش‌آموزان و در نهایت افزایش یادگیری و درک آنها انجام می‌گیرند.

چندین نظریه یادگیری و شناخت ادعا می‌کنند که رفتار دانش‌آموزان با این دو نوع دانش شکل می‌گیرد. برای انجام دادن تحقیقات در ارتباط با دانش مفهومی و رویّه‌ای، آگاهی از پاسخ تعدادی از سؤالات اساسی درباره این دو دانش ضرورت دارد؛ سؤالاتی مانند: دانش مفهومی چیست؟ دانش رویّه‌ای چیست؟ چه نوع تکالیفی یا سؤالاتی مفهومی هستند؟ چه نوع تکالیف یا سؤالاتی رویّه‌ای به‌شمار می‌آیند؟ چه نوع تکالیف و سؤالاتی مفهومی و رویّه‌ای هستند؟ دانش مفهومی و رویّه‌ای چه رابطه‌ای با هم دارند؟ در این مقاله پاسخ این سؤالات با توجه به پژوهش‌هایی که در حوزه آموزش ریاضی صورت گرفته است، مورد تحلیل و بررسی قرار می‌گیرد.

ارائه مدلی یک بعدی از دانش ریاضی

مدل اولیه از دانش ریاضی بر اساس نوع، دانش مفهومی را در مقابل دانش رویّه‌ای قرار می‌دهد. از آنجاکه تعریف واحد و دقیقی برای این دو دانش ارائه نشده است، طیف گسترده‌ای از دیدگاه‌های نظری مربوط به دانش مفهومی در مقابل دانش رویّه‌ها در ادبیات تحقیق وجود دارد. هاپاسالو و کادیجویچ[2] (۲۰۰۰)، مهم‌ترین دیدگاه‌های نظری مرتبط با این دو دانش را به صورت زیر فهرست کرده‌اند:

- بدانم که ـ بدانم چگونه[3] (اسکمپ ۱۹۷۹)؛
- دانش اظهاری در مقابل دانش رویّه‌ای[4] (هوفشتاتر[5]، ۱۹۸۰)؛

1. Conceptual knowlede and Procedural Knowledge
2. Haapasalo & Kadijevich
3. Knowing that – Knowing how
4. Declarative vs. Procedural Knowledge
5. Hofstadter

- دانش حقایق / گزاره‌ها در مقابل دانش مهارت‌ها / رویّه‌ها[1] (پاپرت[2]، ۱۹۸۰)؛
- کلمه‌های مشخص کننده مفهوم ـ فرایندها / تصاویر ذهنی[3] (تال، وینر[4]، ۱۹۸۱)؛
- سلسله مراتب واحدهای شناختی ـ شرط ـ قوانین عمل[5] (اندرسون، ۱۹۸۳)؛
- درک و فهم ـ عملکرد الگوریتمی[6] (نشر[7]، ۱۹۸۶)؛
- صلاحیت مفهومی ـ صلاحیت رویّه‌ای[8] (گلمن، مک[9]، ۱۹۸۶)؛
- غنی در مقابل ضعیف در روابط / الگوریتم‌ها[10] (هیبرت، ورنه[11]، ۱۹۸۶)؛
- دانش نظری در مقابل دانش طرح واره ای[12] (ونلن[13]، ۱۹۸۶)؛
- دانش استنتاجی در مقابل دانش تجربی[14] (شونفلد، ۱۹۸۶)؛
- دانش معنادار در مقابل دانش مکانیکی[15] (بارودی، گینزبرگ[16]، ۱۹۸۶)؛
- درک منطقی / رابطه ای در مقابل درک ابزاری[17] (اسکمپ، ۱۹۸۷)؛

---

1. Facts/Propositional vs. Skills/ Procedural Knowledge
2. Papert
3. Words Specifying Concept Processes/Mental Images
4. Vinner
5. Hierarchies of Cognitive Units – Condition – Action Rules
6. Understanding – Algorithmic Performance
7. Nesher
8. Conceptual Competence – Procedural Competence
9. Gelma & Meck
10. Rich vs. Poor in Relationship/Algorithms
11. Hiebert & Wearne
12. Theological vs. Schematic Knowledge
13. Vanlehn
14. Deductive vs. Empirical Knowledge
15. Meaningful vs. Mechanical Knowledge
16. Baroody & Ginsburg
17. Logical / Relational vs. Instrumental Understanding

- تعاریف /ارتباطات ـ قوانین /معنای وسیعتر[1] (تسمر[2] و همکاران ، ۱۹۹۰)؛
- دانش مفهومی در مقابل دانش عملی[3] (پیاژه ،آویک[4] ، ۱۹۹۱)؛
- محتوای ساختاری در مقابل محتوای ابزاری[5] (ویگوستکی، آویک ۱۹۹۱)؛
- بازنمایی‌های رابطه‌ای ـ شرط ـ قوانین عمل[6] (بایرنز، واسیک[7]، ۱۹۹۱)؛
- شبکه‌های متصل ـ دنباله‌ای از اعمال[8] (هیبرت، کارپنتر، ۱۹۹۲)؛
- تفکر ساختاری در مقابل تفکر عملیاتی[9] (اسفارد، ۱۹۹۴)؛
- ارتباط میان مفاهیم ـ مهارت‌های محاسبه‌ای[10] (شیموزو[11] ، ۱۹۹۶)؛
- تفکر فرهومی در مقابل تفکر رویه ای[12] (گری، تال، ۱۹۹۳، ۲۰۰۱).

پژوهش حاضر مجال بررسی همه دیدگاه‌ها را ندارد؛ **بنابراین** به اختصار چند دیدگاه را که در آموزش ریاضی بیشتر مورد بحث بوده‌اند، تشریح می‌کند.

۲ـ۱ـ۱ـ درک منطقی، درک رابطه‌ای در مقابل درک ابزاری (اسکمپ، ۱۹۸۷)

هاپاسالو و کادیجویچ (۲۰۰۰)، تعریف اسکمپ (۱۹۸۹) از سه نوع درک ابزاری،

---

1. Definitions/ Connections – Rules/ Connotations
2. Tessmer
3. Conceptual vs. Practical Knowledge
4. Ivic
5. structural Manifest vs. Instrumental Content
6. Relational Representations – Condition – Action Rules
7. Byrnes & Wasik
8. Connected Networks – Sequences of Actions
9. Structural vs. Operational Thinking
10. Connections Between Conceptions – Computational Skills
11. Shimizu
12. Proceptual Thinking vs. Procedural Thinking

رابطه‌ای و منطقی را بیان می‌کنند. درک ابزاری توانایی به کار بردن قوانین معین بدون دانایی از این‌که چرا آن‌ها کار می‌کنند، اشاره می‌کند. منظور از درک رابطه‌ای، توانایی استنتاج قوانین یا رویّه‌های مخصوص برای ملاحظه تعدادی روابط کلی است. درک منطقی، توانایی برای استدلال استنتاجی را با به کار بردن دنبال‌های از استدلال‌های مناسب برای تعاریف مربوط، اصول موضوعه و قضیه‌ها مشخص می‌کند.

اسکمپ علاوه بر درک ابزاری، درک رابطه‌ای و درک منطقی، تعاریفی برای دو نوع یادگیری به نام یادگیری ابزاری و یادگیری رابطه‌ای مطرح می‌کند. یادگیری ابزاری، یادگیری تعداد زیادی از موارد مشخصی را شامل می‌شود که به وسیله آن‌ها، دانش‌آموزان می‌توانند به وسیله آن‌ها مسیر خود را از نقاط خاصی (داده‌ها) آغاز کنند و به نقاط پایانی خواسته شده (جواب سؤالات) برسند. موارد مشخص به آن‌ها می‌گوید در هر نقطه، چه کار کنند.

یادگیری رابطه‌ای ریاضی، ایجاد ساختار مفهومی را شامل می‌شود به گونه‌ای که دارنده طرحواره برای رفتن از هر نقطه آغازین به هر نقطه پایانی، می‌تواند تعداد نامحدودی نقشه تولید کند؛ برای مثال اسکمپ (۱۹۸۹)، (ترجمه حیدری و گویا، ۱۳۸۴) بیان می‌کند برای دانش‌آموزان یاد گرفتن اینکه «مساحت مثلث برابر است با نصف حاصلضرب قاعده در ارتفاع» (درک ابزاری)، از یادگرفتن علت درستی آن راحت‌تر است.

اما در این صورت، دانش‌آموزان مجبورند قواعد جداگانه‌ای را برای مساحت های مثلث، مستطیل، متوازی‌الاضلاع و ذوزنقه یاد بگیرند، در حالی که با درک رابطه‌ای می‌توان فهمید همه مساحت‌ها با مساحت مستطیل مرتبط هستند.

به طور خلاصه می‌توان گفت دانش‌آموزی که نمی‌تواند حالت‌های خاص را از حالت‌های کلی بیابد و برای هر حالت خاص، به یک الگوریتم، رویّه یا فرمول نیاز دارد و نمی‌تواند روابط میان حالت‌های متفاوت را درک کند، فاقد درک رابطه‌ای در حوزه مورد نظر خواهد بود.

۲ــ۱ــ۲ــ دانش مفهومی در مقابل دانش رویّه‌ای از دیدگاه هیبرت و لفور[۱]

بیشترین پژوهش در ارتباط با دانش مفهومی و دانش رویّه‌ای را می‌توان به کتاب اصلی

۱. Lefevr

که هیبرت و لفور (۱۹۸۶) نوشته است، نسبت داد. آن‌ها بیان می‌کنند دانش مفهومی، در روابط غنی است و می‌تواند به عنوان صفحه مرتبطی (شبکه)، تصور شود که در پیوند روابط میان تکه‌های مجزای اطلاعات پر اهمیت است که حقایق و موضوع‌های مجزا را با تعدادی از شبکه‌ها به هم پیوند می‌دهند. در مقابل، دانش رویّه‌ای بر دو نوع است: نوع اول، آشنایی با نمادهای مجرد از سیستم و نوع دوم قوانین یا رویّه‌هایی برای حل مسائل ریاضی.

هیبرت و لفور (۱۹۸۶)، ساختن ارتباط میان الگوریتم تفریق چند رقمی و دانش ارزش مکانی، ارقام را به عنوان مثالی از دانش مفهومی و جمع کردن دو کسر با مخرج‌های متفاوت را به عنوان مثالی از دانش رویّه‌ای برشمردند. پس از آن، هیبرت و لفور (۲۰۰۳)، مثالی از قدر مطلق‌ها مطرح کردند. آنها معتقدند، دانش‌آموزانی که پیش از این با مسائلی مانند $|x| > ۳$ مواجه شده‌اند، باید بتوانند که مسائلی از نوع $|۲x + ۳| > ۳$ را حل کنند؛ اما معلمان غالباً با این نوع مسائل به عنوان مسائلی از نوع جدید برخورد می‌کنند و رویّه‌های جدیدی برای آنها معرفی می‌کنند.

مثال‌های هیبرت و لفور نشان می‌دهد وقتی دانش‌آموزان دانش مفهومی مناسبی از مطلب داشته باشند، باید بتوانند انواع مسائل مرتبط با آن را حل کنند. کسانی که درک کافی از مطلب مورد نظر ندارند، برای حل هر نوع مسئله‌ای مرتبط با مطلبی که پیش از این با آن مواجه نشده‌اند، به رویّه‌های جدیدی نیاز دارند که معلم به آن‌ها معرفی می‌کند. بنابراین به نظر می‌رسد دیدگاه و نگرش معلم دربارهٔ مسائل جدید، نقش تعیین‌کننده‌ای در توسعه دانش مفهومی و رویّه‌ای دانش‌آموزان ایفا می‌کند.

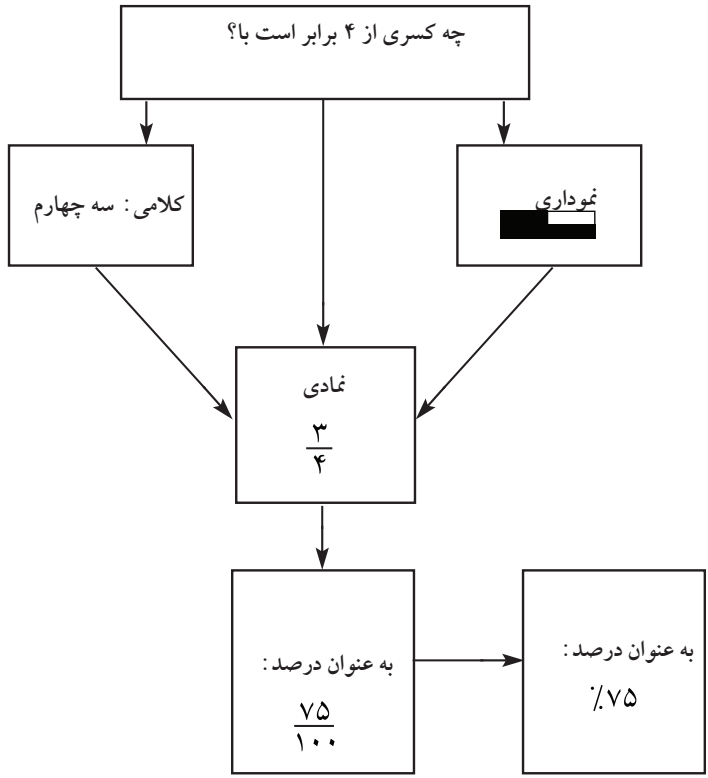
۱ــ۲ــ تعریف دانش مفهومی در مقابل دانش رویّه‌ای از دیدگاه هاپاسالو و کادیجویچ

هاپاسالو و کادیجویچ (۲۰۰۰) معتقدند، دانش رویّه‌ای به کارگیری پویا و موفق از قوانین، الگوریتم‌ها یا رویّه‌های خاص را در قالب‌های ارائه‌ای متناسب با آن‌ها مشخص می‌کند. این (دانش)، به طور معمول تنها دانش موضوعات به کار رفته را نیاز ندارد، بلکه همچنین به آگاهی از شیوه و قالب معرفی سیستم‌های نمایش آنها نیازمند است. به علاوه، دانش رویّه‌ای بیشتر برای گام‌های خودبه‌خودی و ناآگاهانه فراخوانده می‌شود، در حالی که دانش مفهومی دانستن و حرکت ماهرانه در طول شبکه‌های مخصوص را مشخص می‌کند.

عناصر شبکه‌های مخصوص می‌توانند مفاهیم، قوانین (الگوریتم‌ها و رویّه‌ها) و حتی مسائل (مسئله‌ای حل شده، ممکن است یک مفهوم یا قانون جدید را معرفی کند) داده شده، در قالب‌های ارائه‌ای متفاوت باشند. دانش مفهومی فرد را به تلاش‌های فکری آگاهانه فرامی‌خواند.

هاپاسالو و کادیجویچ (۲۰۰۰)، در تکلیفی[1] در مورد درصد، بیان می‌کنند که با توجه به تمایز دو نوع دانش، اگر درصد با نمایش‌های متفاوت و تبدیل (آگاهانه) میان آن نمایش‌ها ارائه شود، مفهومی و اگر با مجموعه‌ای معین از اعمال (به طور خودکار اجرا شده) در یک بازنمایی معین بیان شود، رویّه‌ای در نظر گرفته می‌شود. شکل ۱ این تکلیف را در قالب نمودار نشان می‌دهد.

شکل ۱ـ درصد به عنوان دانش مفهومی/ رویّه‌ای (هاپاسالو و کادیجویچ، ۲۰۰۰)



1.Task

۳ــ ارائه مدلی دو بعدی از دانش

بر اساس مدل‌های اولیه از دانش مفهومی و دانش رویّه‌ای، تصور می‌شد دانش مفهومی، غنی در ارتباطات و پیچیده است و فرد این دانش را آگاهانه به کار می‌برد. در مقابل فرض می‌شد دانش رویّه‌ای فاقد ارتباطات و سطحی است و فرد این دانش را ناآگاهانه و با پیروی از برخی رویّه‌ها یا الگوریتم‌ها به کار می‌برد.

تحقیقات نشان دادند که تعاریف دانش مفهومی و رویّه‌ای نیازمند بازنگری و تغییر اساسی هستند، زیرا ممکن است مفاهیم ریاضی بدون درک حفظ شده، رویّه‌های ریاضی نیز به صورت عمیق درک شوند و آگاهانه به کار روند. از نگاه روانشناختی نیز دانش، مفهومی لزوماً غنی در روابط نیست؛ ممکن است ارتباطات در یک مفهوم سطحی و محدود یا گسترده و عمیق باشند (مدین[1]، ۱۹۸۹).

آندرسون (۱۹۸۲)، (به نقل از استار ۲۰۰۵)، به انواع متفاوتی از رویّه‌ها اشاره می‌کند و معتقد است که تفاوت رویّه‌ها در کیفیت ارتباطاتشان است. بنابراین از این دیدگاه، ممکن است دانش رویّه‌ای هم سطحی یا عمیق باشد.

استار[2] (۲۰۰۲و ۲۰۰۵)، انتقادهایی در ارتباط با تحقیقات در حوزه دانش مفهومی و رویّه‌ای و به خصوص کتاب هیبرت (۱۹۸۶) که بیشتر تحقیقات در حوزه دانش مفهومی و رویّه‌ای را شامل می‌شود، مطرح می‌کند. به اعتقاد استار، از یک طرف تقریباً همه مطالعات این کتاب در ارتباط با موضوعات شمارش، جمع تک رقمی، جمع چند رقمی، و کسرها است که همه آنها، حوزه‌های مطالعه در دوره ابتدایی هستند و فاقد مطالعاتی از دانش رویّه‌ای و مفهومی در جبر، حسابان و هندسه است و از طرف دیگر، دانش مفاهیم و دانش رویّه‌ها به طورمعمول با روش‌های بسیار متفاوت ارزیابی شده‌اند.

دانش مفاهیم بیشتر به صورت شفاهی و از طریق تکالیف متنوع ارزیابی می‌شود، به طوری که دانش مفهومی را پیچیده برمی‌شمارند. در مقابل، دانش رویّه‌ای به صورت تک بعدی و غیر شفاهی با مشاهده اجرای یک رویّه ارزیابی شده است.

هیبرت و هاندا[3] (۲۰۰۴)، علاوه بر این انتقادها، در پژوهشی، رویکردهای یاددهی شش

1. Medin
2. Star
3. Handa

کشوری که در آزمون تیمز ۱۹۹۹ شرکت کرده بودند را مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها نوارهای ویدئویی کلاس‌های درس این کشورها را از لحاظ یاددهی مفهومی و رویّه‌ای تحلیل کردند و متوجه نکته جالبی شدند. دو کشور ژاپن و هنگ کنک که هر دو در آزمون تیمز موفقیت بالایی به دست آورده بودند، رویکردهای یاددهی کاملاً متفاوتی داشتند.

نتایج نشان داد ۸۴ درصد مسائل درس در هنگ کنگ استفاده از رویّه‌هاست، در حالی که ۴۱ درصد مسائل درس در ژاپن، چنین است. همچنین، بیشتر مسائل در ژاپن به صورت ایجاد ارتباطات میان مطالب در قالب مسائلی وابسته به دانش مفهومی ارائه می‌شوند.

هیبرت و هاندا هنگام بررسی روش یاددهی در هنگ کنگ متوجه شدند با وجود نتایجی که بیان شد، معلم رویّه‌ها را به صورت منفصل و جدا از هم عنوان نمی‌کند، بلکه می‌کوشد آن‌ها را به صورت مرتبط با هم مطرح کند و سؤالاتی در ارتباط با مقایسه رویه‌ها، شباهت‌ها و تفاوت‌های آن‌ها از دانش‌آموزان بپرسد. آن‌ها متوجه شدند در روش تدریس معلم پیوندهای مفهومی نیز مشاهده می‌شود. هیبرت و هاندا نتیجه گرفتند محققان باید تعاریف جدیدی از دانش مفهومی و رویّه‌ای ارائه دهند و یا تعاریف قبلی این دو دانش را اصلاح کنند.

سرانجام برخی پژوهشگران (از جمله استار ۲۰۰۵)، تغییر اساسی در تعاریف دانش مفهومی و رویّه‌ای را ضروری برشمردند. استار (۲۰۰۵)، با بازنمایی مدلی دو بعدی، بر اساس مدل دجونگ و فرگوسن- هسلر[1] (۱۹۹۶)، تحولی عمده در تقسیم‌بندی دانش ریاضی و تعاریف دانش مفهومی و دانش رویّه‌ای را پیشنهاد کرد. در این مدل، دانش براساس نوع، به مفهومی و رویّه‌ای و بر اساس کیفیت، به سطحی و عمیق دسته‌بندی می‌شود. استار این مدل را به صورت ماتریسی ۲×۲، مانند جدول۱ ارائه داده است:

استار دانش رویّه‌ای را دانش رویّه‌ها تعریف می‌کند. او بیان می‌کند که استفاده از عبارات دانش مفهومی و دانش رویّه‌ای، مانند تعاریفی که تا کنون برای این دو دانش مطرح شده است، تعاریف دانش رویّه‌ای عمیق و دانش مفهومی سطحی را با مشکل روبه‌رو می‌کند. این دو دانش در جدول ۱ با علامت سؤال مشخص شده‌اند.

1. de Jong & Ferguson- Hessler

جدول۱ـ انواع و کیفیت دانش (استار، ۲۰۰۵)

نوع دانش	کیفیت دانش	
	سطحی	عمیق
رویه‌ای	استفاده عام از دانش رویه‌ای	؟
مفهومی	؟	استفاده عام از دانش مفهومی

استار سرانجام دانش رویّه‌ای عمیق را مانند دجونگ و فرگوسن ـ هسلر (۱۹۹۶)، دانش رویّه‌هایی معرفی می‌کند که با ادراک، انعطاف‌پذیری[۱] و قضاوت نقادانه[۲]، آمیخته است و می‌تواند بدون دانش مفهومی یا با دانش مفهومی به دست آید. او انعطاف‌پذیری را فقط با انتخاب استراتژی مؤثر یکسان می‌داند. اما تعدادی از روانشناسان به نقل از بارودی معتقدند انعطاف پذیری به خلاقیت یا انتقال ـ انطباق[۳] رویه‌ای موجود در برخورد با تکالیف جدید نیز اشاره دارد. در حالی که دانش مفهومی، دانش مفاهیم یا اصولی است که روابط یا اتصالات (نه لزوما غنی) را درگیر می‌کند.

او برای تشریح دانش رویّه‌ای عمیق، تعبیر ونلن (۱۹۹۰) از درک نظری یک رویّه را بیان می‌کند. درک نظری رویّه که فراتر از دنبال کردن رویّه است، به استفاده‌کنندگان امکان می‌دهد رویّه را با شرایط ویژه، اشکال‌زدایی و توسعه رویّه وفق دهند؛ برای مثال، وقتی دانش‌آموزان از ارتباطات میان قوانینی که به کار می‌گیرند، آگاهی داشته باشند، این قوانین را به صورت خودبه‌خودی و ناآگاهانه به کار نمی‌برند، بلکه می‌توانند از قوانین یا استراتژی‌ها در موقع مناسب استفاده کنند یا حتی رویّه‌های لازم را بسازند.

دانش‌آموزانی با دانش رویّه‌ای عمیق می‌توانند در زمان حل معادلات درجه دوم با توجه به ظاهر معادله در زمان مناسب از هر یک از روش‌های حل معادله درجه دوم، مانند گرفتن جذر، فاکتورگیری، تجزیه جمله مشترک، مربع کردن، روش مبین (به کار گیری دستور دلتا) استفاده

۱. Flexibility

2. Critical Judgment

3. Transfer-Adopting

کنند. به کارگیری روش مناسب در حل معادلات بر انعطاف‌پذیری حل کننده، دلالت دارد که یکی از مشخصه‌های دانش رویّه‌ای عمیق است.

برای مثال برای حل معادله $(۳x - ۴)^۲ = ۱۶$، روش مناسب جذرگیری است؛ در معادله $x^۲ - ۵x + ۶ = ۰$، استفاده از روش تجزیه اتحاد جمله مشترک، آسان‌تر از به کارگیری روش مبین است. همین طور، در معادله $x^۲ + ۴x = ۰$، استفاده از روش فاکتورگیری مناسب است؛ اما بسیاری از دانش‌آموزان، با وجود تنوع روش‌ها، وقتی روش مبین را می‌آموزند، روش‌های دیگر را کنار می‌گذارند و فقط از روش مبین استفاده می‌کنند. چنین دانش‌آموزانی انعطاف‌پذیری لازم را برای استفاده از رویّه‌های مناسب ندارند و به عبارت دیگر، دانش رویّه‌ایشان سطحی است.

مدل استار، بُعد «کیفیت» را بر مدل قبلی دانش ریاضی می‌افزاید، اما این بُعد تازه دو تفاوت اساسی در تعاریف دانش مفهومی و رویّه‌ای ایجاد می‌کند. قبل از این مدل به طور معمول دانش مفهومی عمیق، و دانش رویّه‌ای سطحی در نظر گرفته می‌شد، اما استار دانش مفهومی سطحی و دانش رویّه‌ای عمیق را نیز در نظر گرفت و تعاریف دانش مفهومی و به خصوص دانش رویّه‌ای را کامل‌تر کرد. به اعتقاد او با تعاریف قبلی این دو دانش، نمی‌توان به خوبی عملکرد دانش‌آموزان را در استفاده از رویّه مناسب برای حل مسائل توجیه کرد.

۴ــ مدلی سه بعدی از دانش ریاضی

هسنبنک[1] (۲۰۰۶)، در رساله دکتری خود می‌کوشد تا چارچوبی برای درک رویّه‌ای را مورد مطالعه قرار دهد. در پژوهش او با وجود اینکه از عبارات متفاوت درک و دانش عمیق استفاده شده است، اما تعاریف بسیار مشابهی برای این دو عبارت به کار می‌برد و نویسنده به این شباهت اشاره می‌کند.

او در این تحقیق، مدلی سه بعدی از دانش ریاضی بر اساس مدل استار، دجونگ و فرگوسن و هسلر ارائه کرده است. در این مدل دانش ریاضی سه بُعد کلیدی دارد: نوع (رویه‌ای در مقابل مفهومی)، عمق (سطحی در مقابل عمیق) و آمادگی یادگیری[2] (مبتدی در مقابل باتجربه[3]).

---

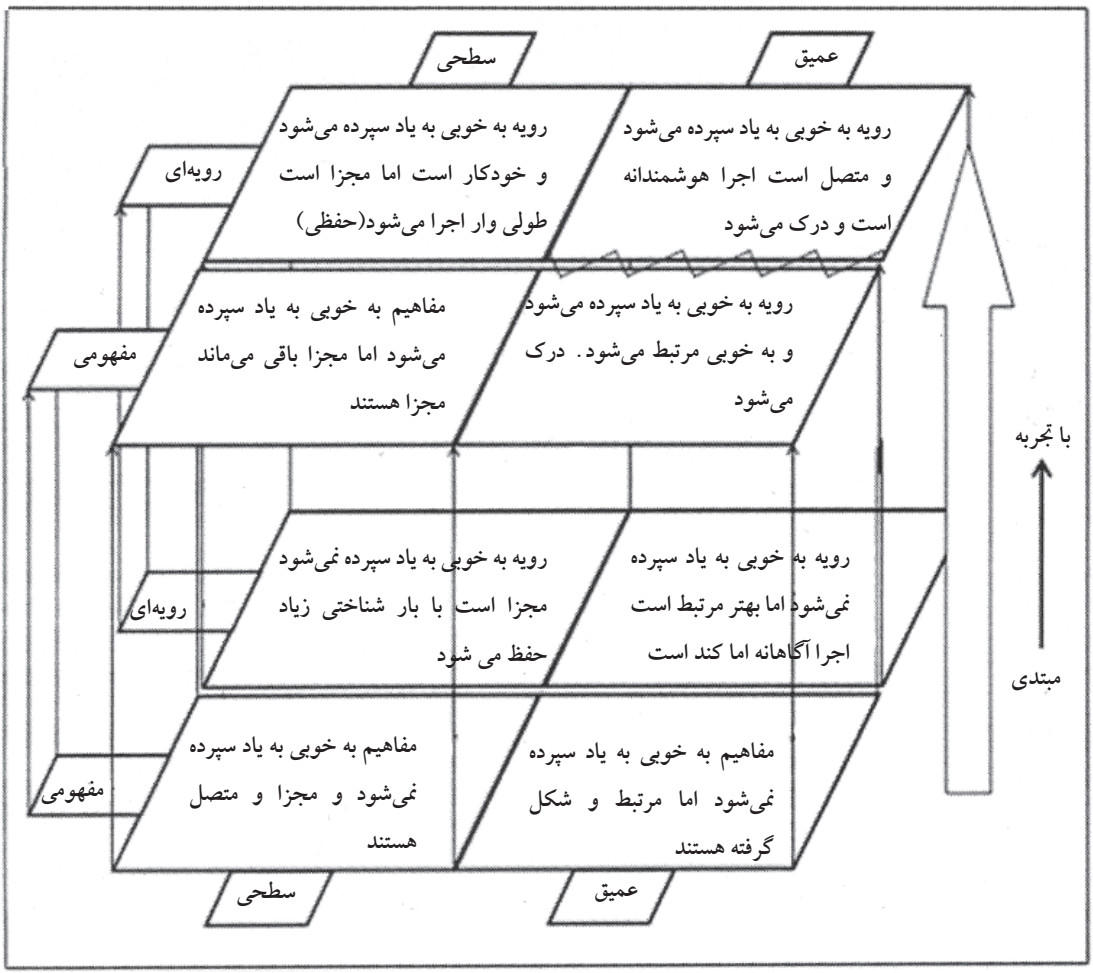
1 - Hasenbank

2- Aptitude

3- Novice vs. Practiced

هسنبنک (۲۰۰۶)، دانش رویّه‌ای را به طور عملیاتی به دانش الگوریتم‌ها، رویّه‌ها و فرایندهای ریاضی و دانش مفهومی را به طور عملیاتی، دانش حقایق، مفاهیم و ایده‌های ریاضی تعریف می‌کند. این مدل سه بعدی در شکل ۲ نشان داده شده است.

شکل۲ـ مدل هسنبنک (۲۰۰۶) از دانش ریاضی



در تعاریف ارائه شده در شکل ۲، بعد «عمق»، ارتباطات میان مفاهیم و رویّه‌ها را نشان می‌دهد اگر مفاهیم یا رویّه‌ها با هم مرتبط باشند، دانش عمیق، و اگر منفصل و مجزا از هم باشند، دانش سطحی شکل گرفته است. در واقع، دانش مفهومی به ارتباط میان حقایق، اصول، مفاهیم

و دانش رویّه‌ای، به ارتباط میان قوانین، الگوریتم‌ها، رویّه‌ها و استراتژی‌ها توجه می‌کند.

منظور از بعد «آمادگی یادگیری» نیز، «به یاد سپردن مفاهیم و رویّه‌ها» است که در سطح با تجربه، مفاهیم و رویّه‌ها به خوبی به یاد سپرده می‌شوند؛ اما در سطح مبتدی چنین نیستند. حال این سؤال مطرح می‌شود که ابتدا باید در امتداد کدام بعد حرکت کرد، عمیق یا آمادگی یادگیری؟ از نظر هسنبنک، ممکن است دانش‌آموز در هر کدام از دو بعد حرکت کند.

نگارندگان مقاله معتقدند برای اینکه دانش‌آموز به درک مورد نیاز در مفاهیم و رویّه‌ها برسد، ابتدا باید دانش او عمیق شود و سپس در بعد آمادگی یادگیری به سطح با تجربه برسد. زیرا در غیر این صورت دانش‌آموزانی که ابتدا در بعد آمادگی یادگیری حرکت می‌کنند، ممکن است مفاهیم و رویّه‌ها را به خوبی به یاد بسپارند، اما هنوز دانش آنها از مفاهیم و رویّه‌ها، سطحی باشد و به دلیل منفصل بودن دانش خود، نتوانند در موقعیت‌های جدید به درستی از دانش مفهومی و رویّه‌ایشان استفاده کنند.

برای مثال، دانش‌آموزی را در نظر بگیرید که با ساختار و مفهوم معادله به عنوان یک تساوی جبری که دو طرف آن با هم برابرند، آشنا شده است؛ اما این دانش‌آموز از ارتباطات میان معادلات آگاهی ندارد و نمی‌تواند معادلات هم‌ارز را تشخیص دهد (وقتی از دانش‌آموز سؤال شود در مورد دو معادله $۱۰ - ۲۱ = ۱۰ - ۵ + ۸y$ و $۲۱ = ۵ + ۸y$ چه می‌توان گفت؟ ممکن است بدون اینکه متوجه هم‌ارزی دو معادله شود، بلافاصله آن را حل کند) یا معادلات با ساختار یکسان را شناسایی کند (وقتی از او سؤال شود در دو معادله $۲۰ = ۵ + ۳t$، $۲۰ = ۵ + ۳x$,بزرگتر است یا t تشخیص می‌دهد هر دو معادله هستند، اما ممکن است تا وقتی معادله‌ها را حل نکرده، نتواند در مورد جواب آن‌ها اظهار نظر کند).

چنین دانش‌آموزی در بعد آمادگی یادگیری حرکت کرده، اما هنوز دانش مفهومی او از معادله، سطحی است. دانش‌آموزی را در نظر بگیرید که دو روش حل معادله درجه اول مانند روش اضافه یا کم کردن مقدارهای مساوی به دو طرف معادله و روش تغییر طرف، تغییر علامت را می‌داند و آن‌ها را درست به کار می‌برد، اما از ارتباط میان این دو روش آگاهی ندارد و نمی‌داند روش تغییر طرف، تغییر علامت، حالت خاصی از آن روش دیگر به شمار می‌آید؛ در چنین حالتی، حرکت این دانش‌آموز برای حل معادله در بعد آمادگی یادگیری است و دانش رویّه‌ای سطحی او در سطح با تجربه است.

استار بُعد «کیفیت» و هسنبنک دو بعد «عمق و آمادگی یادگیری» را به مدل دانش ریاضی افزوده‌اند. در این دو مدل، بعد «کیفیت» و «عمق» یکسان هستند و هر دو به عمیق بودن هر یک از دو دانش مفهومی و رویّه‌ای مربوط می‌شوند. در این دو مدل، «دانش عمیق» معادل «درک» در نظر گرفته شده است.

مبانی روانشناختی طراحی این مدل‌ها به ارتباط میان دانش و درک باز می‌گردد، زیرا وقتی یک واحد از دانش ریاضی درک می‌شود، آن دانش آسانتر به خاطر سپرده می‌شود و می‌تواند در موقعیت‌های گوناگون به کار رود (هیبرت و کارپنتر، ۱۹۹۲). این امر با روانشناسی شناختی که نشان می‌دهد دانشی بهتر به خاطر سپرده می‌شود که برای یادگیرنده معنادارتر باشد، هم‌خوانی دارد.

هیبرت و کارپنتر (۱۹۹۲) عنوان کردند که درک هنگامی به‌دست می‌آید که یک حقیقت، اندیشه، یا رویّه، قسمتی از یک شبکه به هم پیوسته حقایق، ایده‌ها و رویّه‌ها باشد و این شبکه به دیگر شبکه‌ها با شیوه‌های معنادار مرتبط خواهد بود. وقتی دانش درک شود، دانش جدید آسانتر با ساختار موجود هماهنگ خواهد شد و این امر، موجب تسهیل یادگیری می‌شود. با نگاهی به این تعاریف می‌توان به شباهت تعاریف درک و دانش عمیق پی‌برد، زیرا هر دو به ارتباطات میان مفاهیم و یا رویّه‌ها اشاره دارند. در واقع وقتی ارتباطات میان مفاهیم و یا رویّه‌ها برقرار می‌شود، دانش عمق می‌یابد و یا به زبان ساده درک می‌شود؛ این ویژگی دانش با عنوان «کیفیت» در مدل استار و «عمق» در مدل هسنبنک نام‌گذاری شده است.

۵ــ همبستگی دانش رویّه‌ای عمیق و دانش مفهومی عمیق

بارودی[1] (۲۰۰۷)، دانش مفهومی را به عنوان دانشی درباره حقایق (تعمیم‌ها) و اصول تعریف می‌کند. از طرف دیگر دانش رویّه‌ای را اعمال یا دستوری‌های ذهنی شامل قوانین، استراتژی‌ها و الگوریتم‌هایی برای کامل کردن تکلیف، برمی‌شمارد (همانند مدل استار (۲۰۰۵)). اما بارودی (۲۰۰۷) به تفاوتی اصلی میان دیدگاه خود و استار (۲۰۰۵) قائل است؛ که اگرچه دانش مفهومی (به نسبت) سطحی و دانش رویّه‌ای سطحی ممکن است (به نسبت) مستقل از هم موجود باشند، اما دانش رویّه‌ای (به نسبت) عمیق، بدون دانش مفهومی عمیق

1- Baroody

وجود ندارد و عکس این حالت نیز ممکن نیست.

هسنبنک (۲۰۰۶) نیز معتقد است مشکل بتوان دانش مفهومی و رویّه‌ای عمیق را در سطح با تجربه از هم جدا کرد. به همین دلیل، او در شکل ۲، سلول‌های مربوط به دانش مفهومی و رویّه‌ای عمیق را در سطح با تجربه، به هم پیوند زده است. در این شکل، با ارتقا از سطح مبتدی به با تجربه، سطوح عمیق دانش مفهومی و رویّه‌ای چنان در هم تنیده می‌شوند که نمی‌توان مرز میان این دو دانش را در این سطح تعیین کرد.

نگارندگان این مقاله، در آزمونی برای مطالعه عملکرد ریاضی دانش‌آموزان و بررسی تفاوت سطوح دانش آن‌ها، تعدادی از سؤالات تیمز (۲۰۰۳) را مورد استفاده قرار دادند. در این آزمون، ۱۳۴ نفر دانش‌آموزان پایه سوم راهنمایی از ۴ مدرسه به طور تصادفی از میان مدارسی که در آزمون تیمز (۲۰۰۳) شرکت کرده بودند، انتخاب شدند[1]. در اینجا، دو نمونه از این سؤالات و نیز بررسی راه حل‌های دانش‌آموزان ارائه می شود.

●اعداد در توالی ... ، ۲۳ ، ۱۹ ، ۱۵ ، ۱۱ ، ۷ چهار تا چهار تا افزایش می‌یابند. در توالی ... ، ۳۷ ، ۲۸ ، ۱۹ ، ۱۰ ، ۱ هم اعداد نه تا نه تا افزایش پیدا می‌کنند. عدد ۱۹ در هر دو توالی مشترک است. اگر این دو توالی همین طور ادامه داشته باشند، عدد مشترک بعدی چه عددی است؟

همه دانش‌آموزان به جز یک نفر برای پیدا کردن عدد مشترک بعدی از روش ادامه دادن اعداد استفاده کردند. اما یکی از آنان راه حل جالبی به کار برد؛ او کوچک‌ترین مضرب مشترک میان ۴و۹ را پیدا کرد و سپس مضرب مشترک مورد نظر را به عدد مشترک اولی در دو توالی (۱۹) اضافه نمود و عدد مشترک بعدی (۵۵) را به دست آورد.

سطوح دانش این دانش‌آموزان با توجه به دو مدلی که ارائه شده‌اند، تفاوت دارد. برای مثال، دانش‌آموزی که از راه حل دوم استفاده کرده است، ابتدا با دانش مفهومی عمیق خود، صورت مسئله را درک کرده، سپس کوشیده است تا رویّه‌ای برای حل مسئله خلق کند. دانش‌آموز برای ایجاد این رویّه، به دانش رویّه‌ای عمیقی نیاز دارد تا بتواند استراتژی مناسبی برای حل مسئله

۱ـ برای کنترل برخی عوامل تأثیرگذار از قبیل معلم، شرایط اجتماعی و محیطی، مدارس و دانش آموزان و همچنین امکان مقایسه با نتایجی که تیمز اعلام کرده است، چهار مدرسه به طور تصادفی از میان مدارس شرکت کننده در تیمز (۲۰۰۲) انتخاب شدند. پس از بررسی مشخص شد معلمان این مدارس از آن تاریخ تا کنون تغییر نکرده بودند؛ بنابراین عامل معلم نیز کنترل شد

پیدا کند. با این وصف، نمی‌توان مرز میان دانش مفهومی و رویه‌ای این دانش‌آموز را در ارتباط با ریاضیات موجود در این سؤال تعیین کرد و نمی‌توان گفت این دانش‌آموز فقط دانش مفهومی عمیق یا فقط دانش رویه‌ای عمیق دارد. این راه حل، همبستگی دانش مفهومی و رویه‌ای درسطح عمیق را نشان می‌دهد. راه حل این دانش‌آموز در شکل ۳ ارائه شده است:

$$۴\sqcup ۹ = ? \quad ۴\sqcup ۹ = ۱ \Rightarrow \frac{۴\times ۹}{۱} = ۳۶ \Rightarrow ۴\sqcup ۹ = ۳۶$$
$$۱۹ + ۳۶ = ۵۵$$

شکل ۳- راه حل دانش آموز با استفاده از روش محاسبه کوچکترین مضرب مشترک

● اگر $۴(X + ۵) = ۸۰$ باشد، آنگاه مقدار x را پیدا کنید.

راه حل اول: بعضی دانش‌آموزان ابتدا عدد ۴ را در تک تک جملات ضرب کرده، سپس مقدار x را با حل معادله ساده شده، به دست آوردند. راه حل یکی از دانش‌آموزان در شکل ۴ ارائه شده است:

$$۴(x + ۵) = ۸۰ \qquad x = \frac{۶۰}{۴} = ۱۵$$
$$۴x + ۲۰ = ۸۰ \qquad x = ۱۵$$
$$۴x = ۸۰ - ۲۰ = ۶۰$$

شکل ۴- نمونه ای از راه حل دانش آموزان در پاسخ به سؤال موردنظر بااستفاده از راه حل اول

راه حل دوم: تعدادی دیگر از دانش‌آموزان، ابتدا دو طرف معادله را بر ۴ تقسیم کرده، سپس مقدار x را با حل معادله ساده شده، محاسبه کردند. برای مثال راه حل یکی از آنان در شکل ۵ ارائه شده است.

$$x + ۵ = ۸۰ \div ۴$$
$$x + ۵ = ۲۰$$
$$x = ۲۰ - ۵$$
$$x = ۱۵$$

شکل ۵- نمونه ای از راه حل دانش آموزان در پاسخ به سؤال موردنظر با استفاده از راه حل دوم

راه حل‌های مذکور، به سطوح دانش متفاوتی نیاز دارند. راه حل اول بیشتر به صورت یک رویّه به دانش‌آموزان ارائه می‌شود، به این صورت که ابتدا عدد را در تک تک جملات پرانتز ضرب کرده، سپس معادله ساده شده را حل کنید که برای اجرای این رویّه، داشتن دانش رویّه‌ای سطحی کافی است. دانش آموزانی که راه حل دوم را به کار بردند، عبارت $x+۰$ را به عنوان یک جزء تشخیص دادند و با استفاده از آن، به معادله ساده‌تری رسیدند. این دانش آموزان در واقع، یک رویه جدید را به کار بردند.

تجزیه و تحلیل راه حل دوم نشان می‌دهد سطح دانش رویّه‌ای نسبت به راه حل اول بالاتر است. حتی دانش مفهومی دانش‌آموزان نیز برای حل مسئله با استفاده از این راه حل درگیر می‌شود، زیرا تشخیص یک عبارت جبری به عنوان یک مجهول یا متغیر احتیاج به درکی توسعه یافته از مفهوم متغیر دارد. این یافته نشان می‌دهد نمی‌توان دانش رویّه‌ای و مفهومی را در سطح عمیق از هم جدا کرد.

۶. رابطه میان دانش مفهومی و دانش رویه‌ای از دیدگاه‌های متفاوت

رابطه میان دانش رویّه‌ای و دانش مفهومی، بارها در حوزه آموزش ریاضی مورد بحث قرار گرفته است. تحقیقات بسیار، در ارتباط با اینکه کدام یک از دو نوع دانش، اول توسعه می‌یابند، شواهد متناقضی را نشان دادند (ریتل جانسون و سیگلر[1]، ۱۹۹۸). به نظر جانسون، سؤالاتی مانند اینکه کدام یک از این دو نوع دانش اهمیت بیشتری دارند؟ یا اینکه کدامیک اول توسعه پیدا می‌کنند؟ مناسب نیستند، زیرا هر دو دانش نقش تعیین کننده‌ای در یادگیری دارند؛ بلکه همانطور که هیبرت و کارپنتر (۱۹۹۲) اشاره کرده‌اند، شاید مهمترین سؤالی که باید پرسیده شود این است که چگونه دانش مفهومی و دانش رویّه‌ای به هم مرتبط می‌شوند.

برخی پژوهشگران (ریتل جانسون و سیگلر، ۱۹۹۸، هاپاسالو و کادیجویچ، ۲۰۰۰، هاپاسالو ۲۰۰۳) روابطی میان دانش مفهومی و دانش رویّه‌ای تشخیص دادند که از این میان، به دلیل تناسب آنها با موضوع، به پنج رابطه زیر اشاره می‌شود:

۱ــ دیدگاه ناکنش ور[2]: دانش رویّه‌ای و مفهومی به هم مربوط نیستند. (نشر، ۱۹۸۶؛

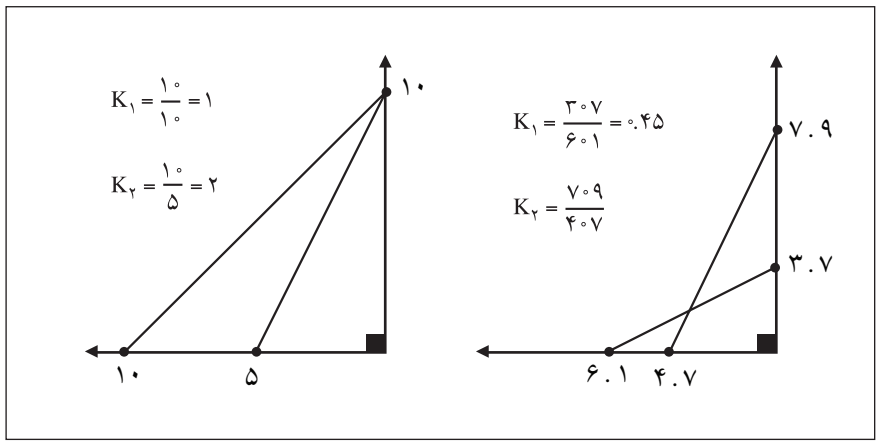
1.Rittle Johnson & Siegler

2. Inactivation view

رزنیک و اومانسون[1]، ۱۹۸۷؛ به نقل از هاپاسالو و کادیجویچ ۲۰۰۰ و ۲۰۰۳)

۲ــ دیدگاه کنش همزمان[2]: دانش رویه‌ای شرط لازم و کافی برای دانش مفهومی است. (هیبرت، ۱۹۸۶، بایرنز و واسیک، ۱۹۹۱، هاپاسالو، ۱۹۹۳، ۱۹۹۷، به نقل از هاپاسالو و کادیجویچ ۲۰۰۰ و ۲۰۰۳)

منظور از دیدگاه کنش همزمان این است که هر دو دانش همزمان توسعه می‌یابند. برای مثال، در مطالعه‌ای هاپاسالو (۲۰۰۳)، برای یادگیری مفهوم شیب با استفاده از نرم‌افزای کامپیوتری، به دانش‌آموزان تکالیفی داد؛ در آن تکالیف، دانش‌آموزان شیب خط را به‌طور شهودی تغییر می‌دادند و به طور همزمان، مشاهده می‌کردند که چگونه بازنمایی مجرد نمادین تغییر می‌کند. در این مثال، روش کنش همزمان برای ایجاد ارتباط میان دانش رویّه‌ای شهودی و دانش مفهومی انتزاعی به‌کار می‌رود. ایجاد این ارتباط‌ها لزوماً از انتزاعی یا شهودی آغاز نمی‌شود، بلکه می‌تواند در بین انتزاعی و شهودی و حتی از میان مفاهیم انتزاعی آغاز شود. شکل ۶، مثال‌هایی از تکالیف ارائه شده به دانش‌آموزان را نشان می‌دهد.



شکل ۶- مثالی از دیدگاه بخش همزمان: با استفاده از موس حرکت دادن خط ها و به طور همزمان مشاهده تغییر نمادین شیب خط (برگرفته از هاپاسالو ۳۰۰۲)

1. Resnick & Omanson
2. Simultaneous activation view

۳ــ دیدگاه برهمکنشی پویا[1] : دانش مفهومی برای دانش رویّه‌ای شرط لازم است، اما شرط کافی نیست؛ یعنی دانش مفهومی پیش از دانش رویّه‌ای توسعه می‌یابد (بایرنز و واسیک، ۱۹۹۱، به نقل از هاپاسالو و کادیجویچ ۲۰۰۰ و ۲۰۰۳).

۴ــ دیدگاه تکوینی[2] : دانش رویّه‌ای برای دانش مفهومی شرط لازم است، اما شرط کافی نیست. یعنی دانش رویّه‌ای قبل از دانش مفهومی توسعه می‌یابد (کلاین[3]، ۱۹۸۰، کیچر[4]، ۱۹۸۳، ورناد[5]، ۱۹۹۰، گری و تال ۱۹۹۳، اسفارد ۱۹۹۴، به نقل از هاپاسالو و کادیجویچ ۲۰۰۰ و ۲۰۰۳).

۵ــ دیدگاه رفت و برگشتی[6] : دانش رویّه‌ای و مفهومی به طور رفت و برگشتی توسعه می‌یابند. به‌طوری که پیشرفت در یک نوع دانش، به پیشرفت در نوع دیگر دانش و برعکس منجر می‌شود (ریتل جانسون و کودینگر[7]، ۲۰۰۲؛ ریتل جانسون و سیگلر و آلیبالی، ۲۰۰۱؛ استار، ۲۰۰۲).

تفاوت میان دیدگاه رفت و برگشتی با دیدگاه کنش همزمان این است که در دیدگاه کنش همزمان، دو دانش همزمان توسعه می‌یابند و سپس بر یکدیگر اثر می‌گذارند، در حالی که در دیدگاه رفت و برگشتی، نه تنها دو دانش همزمان توسعه نمی‌یابند، بلکه بر خلاف دیدگاه‌های برهم‌کنشی پویا و تکوینی، مشخص نیست که ابتدا کدام نوع دانش توسعه می‌یابد؛ برای مثال ممکن است در بعضی مواقع، دانش مفهومی اول توسعه یابد و بر دانش رویّه‌ای اثرگذار باشد یا برعکس، ابتدا دانش رویّه‌ای توسعه یابد و بر دانش مفهومی تأثیر بگذارد. با این توصیفات، دیدگاه رفت و برگشتی به نوعی می‌تواند سه دیدگاه دیگر را هم در بر داشته باشد.

---

1. Dynamic interaction view
2. Genetic view
3. Kline
4. Kitcher
5. Vergnaud
6. Iterative
7. Koedinger

ریتل جانسون و کودینگر (۲۰۰۲) در مطالعه‌ای، رویکرد رفت و برگشتی (که آموزش رویّه‌ای و مفهومی در هم آمیخته بودند) و رویکرد «اول ـ مفهوم» (که درس‌های مفهومی بر درس‌های رویّه‌ای مقدم بودند) را با هم مقایسه کردند. درس‌ها با سیستم تدریس هوشمند مبتنی بر کامپیوتر به ۷۲ دانش‌آموز پایه ششم ارائه شد. نتایج به طور قابل توجهی نشان داد در پس آزمون، دانش‌آموزان در وضعیت رفت و برگشتی نسبت به دانش‌آموزانی که در وضعیت «اول ـ مفهوم» بودند، بهتر عمل کردند. به علاوه، برهمکنشی مؤثری میان دو وضعیت و نوع دانش وجود داشت. آنها این یافته‌ها را به این معنی تفسیر کردند که آموزش با رویکرد رفت و برگشتی بودند ارتباط میان درس‌های مفهومی و رویّه‌ای را مشخص می‌کند و این ارتباط‌ها برای غلبه بر خطاهای رویّه‌ای معمولی، به دانش‌آموزان کمک می‌کنند.

دیدگاه اخیر رابطه کامل‌تری میان دانش مفهومی و رویّه‌ای نسبت به دیگر رابطه‌ها به تصویر می‌کشد. در این رابطه، می‌توان از مفهوم به رویّه و از رویّه به مفهوم رسید؛ بنابراین ارتباط میان مفاهیم و رویّه‌ها در ذهن دانش‌آموزان شکل می‌گیرد و دانش‌آموزان را به سطح عمیق دانش می‌رساند. شبکه ارتباطات میان مفاهیم و رویّه‌ها به طور پیوسته، با استفاده از این رابطه در ذهن دانش‌آموزان گسترده می‌شود و هر چه این شبکه گسترده‌تر شود، دانش آن‌ها عمق بیشتری می‌یابد.

ریتل جانسون و سیگلر و آلیبالی(۲۰۰۱)[1]، فرق میان نظریه «اول ـ مفاهیم» و «اول ـ رویّه‌ها» (یعنی تفاوت میان دو دیدگاه ۳ و۴) را مشخص می‌کنند. مطابق با نظریه «اول ـ مفاهیم» دانش‌آموزان در ابتدا دانش مفهومی را برای مثال با گوش دادن به توضیحات کلامی به دست می‌آورند و سپس با تمرین دانش رویّه‌ای را از آن استنتاج می‌کنند. در مقابل، نظریه «اول- رویه‌ها» ادعا می‌کند دانش‌آموزان در ابتدا، دانش رویّه‌ای را در حوزه‌ای مخصوص برای مثال با یادگیری آزمایش و خطا به دست می‌آورند و سپس به تدریج دانش مفهومی انتزاعی از بازتاب بر آن حاصل می‌شود.

1. Siegler & Alibali

دو رویکرد پداگوژیکی[1]

دو رویکرد پداگوژیکی (توسعه‌ای و آموزشی) که هاپاسالو (۲۰۰۳) و هاپاسالو و کادیجویچ (۲۰۰۰) مطرح کرده‌اند بر اساس رابطه‌های دوم، سوم و چهارم، میان دانش مفهومی و دانش رویّه‌ای در بند ۶، گرفته شده‌اند. دو نوع رویکردی که بیشتر درباره رابطه دانش رویّه‌ای و مفهومی بیان می‌شوند عبارتند از:

- رویکرد توسعه‌ای[2]: محققان زیادی پی‌برده‌اند که دانش رویّه‌ای، توسعه دانش مفهومی را ممکن می‌کند. این امر به دیدگاه تکوینی یا دیدگاه کنش همزمان مربوط است. یعنی به کاربردی کردن دانش رویّه‌ای و بازتاب بر روی نتایج آن؛ از میان طرفداران این رویکرد می‌توان ونلن (۱۹۸۶)، اسفارد (۱۹۹۴)، گری و تال (۱۹۹۲)، ورناد (۱۹۹۰) و پاپرت (۱۹۸۰) را نام برد (به نقل از هاپاسالو و کادیجویچ ۲۰۰۰).

برای مثال، بر اساس نظر ونلن (۱۹۸۶)، در حقیقت بیشتر بررسی‌ها در حساب، با دستورالعمل‌هایی آغاز می‌شوند که به دانش‌آموزان برای انجام دادن محاسبات، فقط یک دانش طرحواره یا رویّه‌ای ارائه می‌دهد؛ سپس به‌کارگیری بعضی روش‌های دیگر، دانش نظری (مفهومی) از مهارت به آنها ارائه می‌کند.

- رویکرد آموزشی[3]: اکثر محققانی که طرفدار این رویکرد هستند، فرض می‌کنند دانش مفهومی، توسعه دانش رویّه‌ای را ممکن می‌سازد. که منظور از معنی‌سازی برای دانش رویّه‌ای پیش از تسلط یافتن بر آن است. ممکن است این رویکرد با دیدگاه برهمکنشی پویا یا دیدگاه کنش همزمان حمایت شود. از میان طرفداران این رویکرد می‌توان از کارپنتر هیبرت (۱۹۹۲)، هاپاسالو (۱۹۹۳)، اندرسون (۱۹۸۳)، بایرنز و واسیک (۱۹۹۱) و گلمن و مک (۱۹۸۶) نام برد (به نقل از هاپاسالو و کادیجویچ ۲۰۰۰).

---

1. Pedagogical approach
2. Developmental approach
3. Educational approach

۷ــ نتیجه‌گیری

در بررسی دیدگاه‌هایی که در ارتباط با دانش مفهومی و دانش رویّه‌ای ریاضی ارائه شده‌اند، این نتیجه به دست می‌آید که نمی‌توان تعریف مطلقی برای این دو دانش ارائه داد. با این وجود، تعاریف به تدریج کامل‌تر و دقیقتر شده‌اند و نکات مبهم زیادی را روشن کرده‌اند. ویژگی‌های دانش نیز مورد بازنگری قرار گرفته‌اند، به طوری که استار (۲۰۰۵)، علاوه بر نوع دانش (مفهومی در مقابل رویّه‌ای)، بُعد دیگری از دانش ریاضی بر اساس سطوح دانش (سطحی در مقابل عمیق) را معرفی می‌کند و در ادامه مدل هسنبنک (۲۰۰۶) از دانش ریاضی بر اساس نوع (مفهومی در مقابل رویه‌ای)، کیفیت (سطحی در مقابل عمیق)، و آمادگی یادگیری (مبتدی در مقابل با تجربه) مطرح می‌شود که یک بعد دیگر بر مدل استار افزوده است.

علاوه بر سه بعدی بودن مدل هسنبنک نسبت به مدل استار، تفاوت دیگر مدل استار و هسنبنک به سطوح عمیق دانش مفهومی و رویّه‌ای مربوط است. بارودی این تفاوت را که دانش مفهومی و رویّه‌ای در سطوح عمیق از هم مجزا نیستند، به عنوان تنها تفاوت دیدگاه خود با استار مطرح می‌کند. به اعتقاد ما نیز نمی‌توان دانش مفهومی و *رویه‌ای* را در سطوح عمیق از هم جدا کرد، زیرا مرزهای میان این دو دانش در سطوح عمیق به حدی به هم نزدیکند که قابل تفکیک نیستند.

مدل دو بعدی استار از دانش، نقطه عطفی در تاریخ دانش مفهومی و دانش رویّه‌ای به شمار می‌آید، زیرا این مدل، تحولی اساسی در تعاریف این دو دانش ایجاد کرده است و محققان بعدی نیز از مدل استار الهام گرفته‌اند. در واقع استار با بازنگری تحقیقات و تعاریف موجود از دانش مفهومی و دانش رویّه‌ای و ذکر انتقادهایی در ارتباط با آنها، برای اصلاح این تعاریف، مدل دو بعدی خود از دانش را ارائه کرد.

تعاریف اخیر دانش مفهومی و دانش رویّه‌ای نسبت به تعاریف پیشین، تعدیل و اصلاح شده‌اند. علاوه بر تغییرات در تعاریف آنها، رابطه میان این دو نوع دانش نیز دستخوش تغییرات زیادی شده است. این دیدگاه‌ها طیفی را نشان می‌دهند که از نبودن هیچ رابطه‌ای میان دو دانش، تا توسعه همزمان دانش مفهومی و دانش رویّه‌ای، توسعه دانش مفهومی پیش از دانش رویّه‌ای، توسعه دانش رویّه‌ای پیش از دانش مفهومی و در نهایت جدیدترین تغییرات در رابطه میان دو

دانش، یعنی رابطه‌ای رفت و برگشتی میان آنها را در بر می‌گیرد.

رابطه اخیر به این مطلب اشاره دارد که این دو دانش بر یکدیگر تأثیرگذارند و موجب پیشرفت و توسعه می‌شوند. این رابطه نسبت به سایر رابطه‌ها قالب منطقی‌تری را به تصویر می‌کشد، زیرا از یک طرف ارتباطی متقابل میان این دو دانش را بیان می‌کند و از طرف دیگر، به نوعی شامل سه رابطه دیگر نیز می‌شود.

تحلیل و ارزیابی عملکرد ریاضی دانش‌آموزان بر مبنای دانش مفهومی و دانش رویّه‌ای آن‌ها، نیاز به چارچوب نظری مناسبی دارد. بنابراین، لزوم مطالعه بیشتر در مورد این دو نوع دانش و رابطه میان آنها، برای بهره‌گیری از نتایج آن برای بهبود فرایند یاددهی و یادگیری ریاضی، به خوبی احساس می‌شود. از جمله موضوعات اساسی که شایسته تحقیقی جامع هستند، بررسی نقش برنامه درسی ریاضی و شیوه تدریس معلمان در ارتباط با دانش ریاضی دانش‌آموزان است.

بازنمایی مفهومی و رویّه‌ای در کتاب‌های درسی ریاضی و روش تدریس معلمان باید در جهت ارتقای دانش مفهومی و رویّه‌ای دانش‌آموزان برای رساندن آن‌ها به سطح عمیق دانش باشد و این امر زمانی تحقق می‌یابد که به برقراری رابطه مناسبی میان ارائه مفهومی و ارائه رویّه‌ای، توجه اساسی شود.

منابع

اسکمپ، ریچارد .(۱۹۸۹). فهم رابطه‌ای و فهم ابزاری؛ مترجمان: رضا حیدری قزلچه، زهرا گویا، رشد آموزش ریاضی؛ شماره ۱۳۸۱، ص‌ص۴ـ ۱۵ .

Baroody,A.Fiel,Y.&Johnson,A.(2007).AnAlternativeReconceptualization of Procedural And Conceptual Knowledge. Journal of Education Resources Information Center (ERIC), V. 38. PP. 115-131.

De Jong, T., & Ferguson-Hessler, M. (1996). Types and qualities of knowledge. Educational Psychologist, 31, PP. 105-113.

Haapasalo, L. (2003). The conflict between conceptual and procedural knowledge: should we need to understand in order to be able to do, or vice versa? InL. Haapasalo & K. Sormunen (Eds.), Towards meaningful mathematics and science education (Proceedings of the 19th symposium of the Finnish Mathematics and Science Education Research Association, PP. 1-20.

Haapasalo, L. & Kadigevich, Dg. (2000). Two Types of Mathematical Knowledge and Their Relation. Journal fur Mathematic- idaktic 21 (2), PP. 139-157.

Haapasalo, L. & Kadigevich, Dg. (2003). Simultaneous Activation Of Conceptual and Procedural Mathematical Knowledge by Means Of Classpad.

Hasenbank, J. (2006). The Efects of a Framework For Procedural Understanding On College Algebra Students' Procedural Skill And Understanding. A Thesis for Doctor of Philosophy. University of Montana State. By Advisory: Hodgson, T.

Hiebert, J. & Leferve, P. (1986). Conceptual and Procedural Knowledge in Mathematics an Introductory analysis. In J. Hiebert (ED.), Conceptual and Procedural Knowledge: The Case of Mathematics pp.1–27. Hillsdale, Nj: Lawrence Erlbaum Associates

Hiebert, J & Carpenter,T. (1992). Learning And Teaching With Understanding. In D. Grouws (Ed.), Handbook of Research in Mathematics Teaching and Learning. New York: Macmillan, pp. 65-97.

Hiebert, J. & Leferve, P. (2003). Developing Understanding Through Problem Solving. In H. L. Schocn (Ed.), Teaching Mathematics Through Problem Solving: Grades 6-12 PP. 3-13. Reston, VA: National Council of Teachers Of Mathematics.

Hiebert, J & Handa, Y. (2004). A Modest Proposal For Reconceptualizing The Activity of Learning Mathematical Procedures. Paper presented at the annual meeting of the American Educational Research Association, San Diego, CA.

Medin, D. L. (1989). Concepts and Conceptual Structure. American Psychologist, 44, pp. 1469-1481.

Rittle Johnson, B. & Siegler, R. S. (1998). The relations between conceptual and procedural knowledge in learning mathematics: A review. In C. Donlan (Ed.), The development of mathematical skill PP. 75-110. Hove, England: Psychology Press.

Rittle Johnson, B., Siegler, R. S., & Alibali, M. W. (2001). Developing conceptual understanding and procedural skill in mathematics: An iterative process. Journal of Educational Psychology, 93, PP. 346-362.

Rittle Johnson, B. & Koedinger, K. R. (2002). Comparing Instructional Strategies for Integrating Conceptual and Procedural Knowledge. Paper presented at the 24th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Athens, GA.

Star, J. R. (2002). Re – " Conceptualizing " Procedural Knowledge in Mathematics. Journal of Education Resources Information Center (ERIC).

Star, J. R. (2005). Reconceptualizing Procedural Knowledge. Journal for Research in Mathematics Education, 36(5), PP. 404-411.

Vanlehn, K. (1986). Arithmetic Procedures are Induces from Examples. In Hiebert, J. (Ed.), Conceptual and Procedural Knowledge: the case of mathematics. Hillsdale, NJ: Erlbaum . PP . 133 -178 .