

# درک و اشتباهات مفهومی دانش آموزان از مفهوم متغیر در جبر مقدماتی

■ الهه امینی فر\*  
■ شیما زهرهوند\*\*  
■ علی زعیم‌باشی\*\*\*

## چکیده:

درک مفهوم متغیر، در جبر پایه‌ای برای درک بسیاری دیگر از مفاهیم جبری است. مفهوم متغیر می‌تواند در موقعیت‌های مختلف، به صورت‌های گوناگون مانند مجهول خاص، عدد عمومی و در رابطه تابعی به کار رود. ماهیت انتزاعی و کاربردهای چندگانه متغیر، درک آن را برای دانش آموزان دشوار ساخته است. هدف پژوهش حاضر که توصیفی و از نوع زمینه‌یابی است، شناسایی علل درک اشتباه دانش آموزان از مفهوم متغیر در جبر مقدماتی است. در این مطالعه ۱۸۵ نفر از دانش آموزان دختر پایه اول دوره دوم متوسطه دو ناحیه آموزشی در تهران بزرگ، به روش نمونه‌گیری در دسترس، انتخاب شدند. داده‌ها از طریق یک آزمون کتبی و مصاحبه‌های نیمه‌ساختاری جمع‌آوری شد. طبق برآورد ضریب آلفای کرونباخ، ضریب پایایی آزمون ۰/۸۱۱+ است. نتایج به‌دست‌آمده نشان داد که اغلب دانش آموزان، درک ناقصی از مفهوم متغیر دارند و در درک متغیر به‌عنوان عدد عمومی نیز، عملکرد ضعیف‌تری نسبت به کاربرد متغیر به‌عنوان مجهول خاص و در رابطه تابعی دارند. همچنین، آن‌ها دارای اشتباهات مفهومی متعددی هستند که شامل در نظر گرفتن متغیر به‌عنوان برچسب یا مخفف نام اشیا، در نظر گرفتن متغیر به‌عنوان یک عدد خاص، چگونگی تعیین مقدار متغیر با توجه به علامت آن، در نظر گرفتن جملات نامتشابه به‌عنوان جملات متشابه و نیز مثبت در نظر گرفتن متغیر است. علاوه بر این، بسیاری از دانش آموزان باور دارند که متغیرهای ناهمنام هیچ‌گاه مقادیر یکسان نمی‌پذیرند.

## کلید واژه‌ها:

مفهوم متغیر، اشتباه مفهومی، جبر مقدماتی

□ تاریخ دریافت مقاله: ۹۲/۱۰/۲۲ □ تاریخ شروع بررسی: ۹۲/۱۲/۲۵ □ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۳/۷/۱۵

\* استادیار، دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی ..... elaheamini@srttu.edu  
\*\* دانشجوی کارشناسی ارشد آموزش ریاضی، دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی ..... shima\_zh66@yahoo.com  
\*\*\* استادیار، دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی ..... azaembashi@srttu.edu

## مقدمه

مامبا<sup>۱</sup> (۲۰۱۱) تأکید دارد که مفاهیم جبری، نقش بسیار مهمی در حل مسائل، تفکر و روابط ریاضی دارند. این تأکید همسو با توصیه شورای ملی معلمان ریاضی<sup>۲</sup> (۲۰۰۰) در امریکاست که در آن، بیان شده است که همه دانش‌آموزان، باید جبر را یاد بگیرند و مطالعه جبر باید جزئی از برنامه درسی از پیش‌دبستان تا پایه دوازده باشد. فاستر<sup>۳</sup> (۲۰۰۷) معتقد است از آنجا که جبر مبتنی بر تعمیم حساب و مرتبط ساختن ایده‌های ریاضی به یکدیگر با زبانی نمادین است، معمولاً هنگامی که دانش‌آموزان شروع به یادگیری جبر می‌کنند، آن را انتزاعی و بی‌ارتباط با دنیای واقعی می‌بینند. اما در هر صورت، با توجه به نقش جبر در برنامه درسی ریاضی مدرسه‌ای، یادگیری متغیر، که یکی از مفاهیم اساسی جبر است و درک بسیاری از مفاهیم جبری از قبیل معادله و تابع به درک آن وابسته است، یک مسئله مهم است. متغیر می‌تواند با توجه به موقعیت‌های مختلف، به صورت‌های گوناگونی از جمله مجهول و عدد عمومی<sup>۴</sup> به کار رود. به گفته شورای ملی معلمان ریاضی (۲۰۰۰)، دانش‌آموزان در پایه‌های ۶ تا ۸، به‌منظور نمایش، تحلیل مسائل و ساختارهای ریاضی با استفاده از نمادهای جبری، نیازمند درک مفهوم متغیر و کاربردهای آن هستند (ص. ۲۲۲). اما با وجود اینکه درک مفهوم متغیر، اساس موفقیت دانش‌آموزان در درس جبر است، این مفهوم پیچیده‌تر از آن است که به نظر می‌رسد و اغلب، مانع پیشرفت دانش‌آموزان در جبر می‌شود (انگلیش<sup>۵</sup> و وارن<sup>۶</sup>، ۱۹۹۸)؛ چنان که کوچمن<sup>۷</sup> (۱۹۷۸)، و تریگروس<sup>۸</sup> و یورسینی<sup>۹</sup> (۲۰۰۳) نیز در پژوهش‌های خود، نشان داده‌اند که دانش‌آموزان برای درک این مفهوم و به‌کارگیری آن، با مشکلات متعددی مواجه می‌شوند. از نظر ساهین<sup>۱۰</sup> و سویلا<sup>۱۱</sup> (۲۰۱۱)، یکی از دلایلی که دانش‌آموزان پایه‌های ۶ تا ۸، مفهوم متغیر را به‌درستی درک نمی‌کنند این است که آن‌ها، در حال گذر از مرحله عملیات عینی (تجسمی) به مرحله عملیات انتزاعی هستند. این دو پژوهشگر به نقل از دد<sup>۱۲</sup> و آرگان<sup>۱۳</sup> (۲۰۰۳) ابراز می‌دارند که حروفی که نشان‌دهنده متغیرها هستند ممکن است با توجه به محتوای موردنظر، معانی و کاربردهای مختلفی را بپذیرند و همین امر باعث به‌وجود آمدن مشکلات و اشتباهاتی در درک مفهوم متغیر می‌گردد.

اشتباهات مفهومی یا بدفهمی‌ها، ناشی از شکل‌گیری ناقص دانش و تجربه دانش‌آموز در موقعیت یاددهی-یادگیری است و باید علت آن شناسایی و ریشه‌یابی گردد. در تبیین چگونگی پیدایش اشتباهات مفهومی، لازم است به این مهم توجه نمود که آن‌ها صرفاً به‌عنوان یک غلط یا اشتباه اتفاقی مطرح نیستند، بلکه در قالب یک ساختار ذهنی از ایده‌های ناقص شکل می‌گیرند (علم‌الهدایی، ۱۳۸۸). مثلاً ممکن است بر اثر آموزش‌های نامناسب قبلی، یادآوری ضعیف و یا تفکر غیررسمی ایجاد شوند (سویگور<sup>۱۴</sup>، ۲۰۰۸). هامر<sup>۱۵</sup> (۱۹۹۶) معتقد است که اشتباهات مفهومی باثبات‌اند، و دارای ساختارهای شناختی محکمی هستند، با درک متخصصان متفاوت‌اند

و به‌طور قابل توجهی بر روی چگونگی درک دانش‌آموزان از اتفاقات طبیعی و تعاریف علمی تأثیر می‌گذارد. بدین سبب، برای اینکه دانش‌آموزان به درک عمیقی از یک مفهوم - و در این مورد، مفاهیم پایه‌ای جبر- برسند، باید بر آن‌ها غلبه کرد، از آن‌ها دوری گزید یا آن‌ها را حذف نمود.

صدیقی (۱۳۸۷) یکی از عوامل ناتوانی دانش‌آموزان در تعمیم جبری، را به درک نادرست آن‌ها از مفهوم متغیر نسبت داده است. کریمی‌کیا (۱۳۹۱) نیز در پژوهشی که در خصوص معادلات درجه اول انجام داده به این نتیجه رسیده است که بخشی از اشتباهات مفهومی دانش‌آموزان در مورد این معادلات، ناشی از بدفهمی آن‌ها از متغیر است. پس با شناسایی اشتباهات مفهومی دانش‌آموزان، تبیین راهکارهای مؤثر برای جلوگیری از شکل‌گیری چنین اشتباهاتی، امکان‌پذیر می‌شود. لذا در این پژوهش، دو سؤال زیر تعیین شد تا به آن‌ها پاسخ داده شود:

**سؤال ۱:** درک دانش‌آموزان پایه اول دوره دوم متوسطه از مفهوم متغیر چگونه است؟

**سؤال ۲:** اشتباهات مفهومی دانش‌آموزان پایه اول دوره دوم متوسطه در رابطه با متغیر کدام‌اند؟

## متغیر و اشتباهات مفهومی آن

هارت<sup>۱۶</sup> (۱۹۵۱)، متغیر را عبارت از «یک حرف که در یک مسئله می‌تواند دو یا تعداد بیشتری مقدار بپذیرد»، تعریف می‌کند (نقل‌شده در یوسیسکین<sup>۱۷</sup>، ۱۹۸۸). متغیر در همه حوزه‌های ریاضی وجود دارد و به صورت‌های مختلفی به کار برده می‌شود. این کاربردهای مختلف، درک مفهوم متغیر را برای دانش‌آموزان دشوار کرده است (تریگروس و یورسینی، ۲۰۰۱). قبلاً، فیلیپ<sup>۱۸</sup> (۱۹۹۲) کاربردهای متفاوت حروف را به‌صورت زیر بیان کرده بود:

۱. برجسب<sup>۱۹</sup> (مثل  $m$  که برای نشان دادن متر به کار می‌رود)

۲. ثابت<sup>۲۰</sup> (مانند  $\pi =$  عدد پی،  $c =$  سرعت نور و  $e =$  پایه لگاریتم طبیعی)

۳. مجهول<sup>۲۱</sup> (مثلاً  $x$  در  $5x - 9 = 91$ )

۴. اعداد تعمیم‌داده‌شده<sup>۲۲</sup> (مثال:  $a$  و  $b$  در  $a + b = b + a$ )

۵. کمیت‌های تغییرکننده<sup>۲۳</sup> (برای نمونه،  $x$  و  $y$  در  $y = 9x - 2$ )

۶. پارامتر<sup>۲۴</sup> (مانند  $m$  و  $b$  در  $y = mx + b$ )

۷. نمادهای مجرد<sup>۲۵</sup> (مثل  $e$  و  $x$  در  $e * x = x$ )

علاوه بر این، تریگروس و یورسینی (۲۰۰۳)، مفهوم متغیر را به‌عنوان مجهول خاص، عدد عمومی و در رابطه تابعی دسته‌بندی کردند که در جدول ۱ آمده است.

درک و اشتباهات مفهومی دانش‌آموزان از مفهوم متغیر در هبر مقدماتی

جدول ۱. دسته‌بندی مفهوم متغیر (تریگروس و یورسینی، ۲۰۰۳)

متغیر	درک <sup>۲۶</sup> و بازنمایی <sup>۲۷</sup>	تفسیر نماد <sup>۲۸</sup>	دست‌ورزی <sup>۲۹</sup>
مجهول خاص	به‌عنوان یک مجهول در یک وضعیت خاص یا در یک معادله	به‌عنوان مجهول خاص در معادلات	فاکتورگیری <sup>۳۰</sup> ، ساده کردن <sup>۳۱</sup> ، بسط‌دادن <sup>۳۲</sup> و موازنه کردن <sup>۳۳</sup> یک معادله
عدد عمومی	به‌عنوان عدد عمومی در روش‌های کلی یا قوانین استنباط شده از الگوهای عددی یا هندسی یا دسته‌ای از مسائل مشابه	به‌عنوان یک تعمیم‌دهنده در عبارات جبری	فاکتورگیری، ساده کردن و بسط‌دادن برای مرتب کردن عبارات
در رابطه تابعی	تشخیص ارتباط و تغییرپذیری بین متغیرهای مرتبط از روی جدول‌ها، گراف‌ها یا تحلیل بازنمایی‌ها	بیان رابطه و تغییرات مشترک در تحلیل بازنمایی‌ها، جدول‌ها و نمودارها	فاکتورگیری، ساده کردن و بسط‌دادن برای مرتب کردن عبارات، جایگذاری مقادیر برای تعیین بازه تغییرات، مقادیر ماکزیمم و مینیمم، رفتار کلی روابط

از این گذشته، اشتباهات مفهومی در مورد متغیرها ممکن است موجب عدم درک نقش حروف در معادلات و ایجاد تمایل برای تفسیر حروف به‌عنوان نام اشیای واقعی گردد (رژنیک<sup>۳۴</sup>، ۱۹۸۱). بوث<sup>۳۵</sup> (۱۹۸۸)، یکی از اشتباهات مفهومی رایج دانش‌آموزان ۱۳ تا ۱۶ ساله را از مفهوم متغیر این می‌داند که معنی متغیرها را درک نمی‌کنند و معمولاً آن‌ها را به‌عنوان برجسب یا مخفف اسامی اشیا به‌کار می‌برند. به گفته وی، بسیاری از دانش‌آموزان،  $a^3$  را به‌جای ۳ برابر تعداد سیب‌ها، به‌طور نادرست به‌عنوان ۳ سیب تفسیر می‌کنند. بوث (۱۹۸۸) توضیح می‌دهد که این اشتباه مفهومی ممکن است به‌دلیل انتقال نامناسب کاربرد قراردادهای قوانین حسابی به جبر ایجاد شود و مثال می‌زند که حروف در حساب می‌توانند به‌عنوان برجسب به‌کار روند؛ مانند  $m$  که به‌عنوان برجسبی برای نشان دادن متر به‌کار می‌رود و  $3m$  به معنای ۳ برابر ۱ متر است، درحالی‌که در جبر،  $3m$  به معنای ۳ برابر مقدار نامعلوم  $m$  است.

مک‌گریگور<sup>۳۶</sup> و استیسی<sup>۳۷</sup> (۱۹۹۷) نیز در پژوهشی به بررسی درک دانش‌آموزان ۱۱ تا ۱۵ ساله از نمادهای جبری پرداختند و دریافتند که بسیاری از دانش‌آموزان ۱۱ ساله، که قبلاً هیچ‌گونه آموزش جبری ندیده بودند، متغیرها را همان علامت اختصاری کلمات (مثلاً حرف  $h$  به‌عنوان ارتفاع) در نظر می‌گیرند. آن‌ها همچنین متوجه شدند که دانش‌آموزان گاهی متغیرها را با توجه به موقعیتشان در الفبای

لاتین مقداردهی می‌کند، مثل اینکه چون  $h$  هشتمین حرف الفبای لاتین است، پس برایشان،  $h=8$  است. آن‌ها بیان کردند که برای درک بهتر دانش‌آموزان از مفاهیم جبری، ضروری است تأکید شود که حروف در جبر نشان‌دهنده اعداد هستند نه اشیا. بوث (۱۹۸۸) به این نتیجه رسید که برخی از دانش‌آموزان فکر می‌کنند متغیرهایی که ظاهر متفاوت دارند نمی‌توانند مقادیر یکسان بپذیرند، مانند عبارت‌های  $3x$  و  $3n$  که از نظرشان، هم‌ارز نیستند، زیرا  $n$  و  $x$  هیچ‌گاه مقادیر یکسان نمی‌پذیرند.

کوچمن (۱۹۷۸) در پژوهشی که در مورد درک دانش‌آموزان ۱۳ تا ۱۵ ساله از مفهوم متغیر انجام داد، از دانش‌آموزان خواست به مسئله «۴» را به عبارت  $3n$  اضافه کنید. پاسخ دهند. بررسی وی نشان داد که ۱۶ درصد دانش‌آموزان، جواب را ۷ به دست آوردند، که بیانگر این است که به‌طور کامل، از متغیر چشم‌پوشی کرده بودند. همچنین، ۳۱ درصد دانش‌آموزان، عبارت  $7n$  را به‌عنوان جواب ارائه دادند. این دانش‌آموزان نیز بدون اینکه به معنی متغیر دقت کنند و دریابند که نشان‌دهنده چه چیزی است، اعداد را با هم جمع کرده و در آخر، متغیر را کنار آن‌ها قرار داده بودند.

ساهیون و سویلا (۲۰۱۱) به‌منظور مشخص کردن و دسته‌بندی خطاها و اشتباهات مفهومی دانش‌آموزان، در پژوهشی که بر روی ۵۰ نفر از دانش‌آموزان پایه هفتم انجام دادند، مسئله «علی<sup>۳۸</sup> ۱۰ سانتی‌متر از مراد بلندتر است، قد مراد  $h$  سانتی‌متر است. قد علی را برحسب  $h$  بنویسید.» را به دانش‌آموزان دادند. در پاسخ به این سؤال، ۴ دانش‌آموز عبارت  $10+y$  را به‌عنوان جواب نوشتند، این دانش‌آموزان، فقط حروف  $x$  و  $y$  را به‌عنوان متغیر قبول داشتند. ۲۴ دانش‌آموز به‌جای نوشتن عبارت جبری  $h+10$ ، برای به دست آوردن جواب، عملیات حسابی را به‌کار بردند. مثلاً، با در نظر گرفتن یک مقدار مثل ۲۰ برای قد مراد، قد علی را ۳۰ سانتی‌متر به دست آوردند. همچنین، وقتی پاسخ‌های دانش‌آموزان به مسئله «عبارت  $4x+9x$  را ساده کنید.» مورد بررسی قرار گرفت، معلوم شد که ۲ دانش‌آموز، متغیر را به‌عنوان ارزش مکانی در نظر گرفته و اعداد دلخواهی را به‌عنوان رقم، در این عبارت جایگذاری نموده و جواب را به صورت  $192=47+95$  نوشته بودند. یعنی این دانش‌آموزان، حاصل ضرب یک عدد و یک متغیر را، یک عدد دورقمی دانسته بودند.

مشکل دیگری که دانش‌آموزان هنگام استفاده از متغیرها دارند این است که یک عبارت جبری را به‌عنوان جواب نمی‌پذیرند. مثلاً در پاسخ‌گویی به مسئله «عددی را بنویسید که ۲ برابر  $x$  باشد»، اغلب آن‌ها  $2x$  را به‌عنوان پاسخ نهایی نمی‌پذیرند. این دانش‌آموزان سعی می‌کنند عدد خاصی را در متغیر جایگزین کنند، زیرا وجود متغیر، جواب را برای آن‌ها بی‌معنا می‌سازد (بوث، ۱۹۸۸).

همچنین، سامو<sup>۴۰</sup> (۲۰۰۸) به این نتیجه رسید که در نظر گرفتن متغیر به‌عنوان یک عدد خاص، یکی دیگر از اشتباهات مفهومی متداول در دانش‌آموزان دوره متوسطه است، مثل اینکه برای بسیاری از آن‌ها،  $2n$  همیشه از  $n+1$  بزرگ‌تر است، زیرا با مقداردهی عدد ۲ به  $n$ ، به این نتیجه می‌رسند که ۴، همیشه از ۳ بزرگ‌تر است.

درک و اشتباهات مفهومی دانش‌آموزان از مفهوم متغیر در هبر مقدماتی

برای داشتن تصویری جامع از پیشینه پژوهشی بررسی شده در مورد انواع اشتباهات مفهومی دانش‌آموزان از مفهوم متغیر و به‌کارگیری آن، نتایج آن‌ها به‌طور خلاصه در جدول ۲ ارائه می‌شود.

جدول ۲. اشتباهات مفهومی دانش‌آموزان در رابطه با مفهوم متغیر و به‌کارگیری آن

ردیف	اشتباهات مفهومی	منابع	مثال
۱۱	نادیده گرفتن متغیر.	سahین و سویلا (۲۰۱۱)؛ کوچمن (۱۹۷۸).	$3x+2x=5$
۲	در نظر گرفتن جملات مختلف به‌عنوان جملات متشابه.	بوث (۱۹۸۸)؛ استیسی و مک‌گریگور (۱۹۹۷)؛ سahین و سویلا (۲۰۱۱)؛ کوچمن (۱۹۷۸).	$4a+5b=9ab$
۳	درک متغیر به‌عنوان ارزش مکانی.	بوث (۱۹۸۸)؛ سahین و سویلا (۲۰۱۱).	مقدار $7x$ به ازای $x=2$ برابر است با ۷۲
۴۴	در نظر گرفتن متغیر به‌عنوان یک عدد خاص.	سahین و سویلا (۲۰۱۱)؛ کوچمن (۱۹۷۸)؛ مک‌گریگور و استیسی (۱۹۹۷)؛ سامو (۲۰۰۸).	$2k$ همیشه از $k+2$ بزرگ‌تر است، زیرا با مقداری عدد ۵ به $k$ ، این نتیجه به‌دست می‌آید که ۱۰، همیشه از ۷ بزرگ‌تر است.
۵	نپذیرفتن عبارت جبری به‌عنوان جواب نهایی.	سahین و سویلا (۲۰۱۱)؛ بوث (۱۹۸۸)؛ استیسی و مک‌گریگور (۱۹۹۷)؛ کوچمن (۱۹۷۸).	عبارت زیر را ساده کنید: $x+2y+2x$ جواب: $3x+2y=3 \times 2+2 \times 5=16$
۶	تمرکز بر متغیرهای $X$ و $Y$ .	سahین و سویلا (۲۰۱۱).	اگر قد دانش‌آموزی $h$ سانتی‌متر باشد و قد معلم ۱۶ سانتی‌متر از او بلندتر باشد. قد معلم برحسب قد دانش‌آموز چقدر است؟ جواب: قد معلم برابر است با $x+16$
۷	در نظر گرفتن متغیر به‌عنوان برچسب.	استیسی و مک‌گریگور (۱۹۹۷)؛ فیلیپ (۱۹۹۲)؛ بوث (۱۹۸۸)؛ سامو (۲۰۰۸).	$7b$ را به‌جای ۷ برابر تعداد موزها، به‌طور نادرست به‌عنوان ۷ موز تفسیر می‌کنند.
۸	باور به اینکه متغیرهای ناهم‌نام مانند $X$ و $Y$ هیچ‌گاه مقادیر مثل هم نمی‌پذیرند.	کوچمن (۱۹۷۸)؛ بوث (۱۹۸۸).	مقدار عبارت‌های $9x$ و $9y$ هیچ‌گاه برابر نمی‌شوند.
۹	مقداردهی به متغیرها با توجه به موقعیت قرارگیری آن‌ها در الفبای لاتین.	استیسی و مک‌گریگور (۱۹۹۷)؛ کوچمن (۱۹۷۸).	برای مثال، مقدار $f$ برابر با ۶ است، زیرا $f$ ششمین حرف الفبای لاتین است.
۱۰	مثبت در نظر گرفتن متغیر.	کوچمن (۱۹۷۸)	به متغیر $X$ فقط اعداد مثبت را نسبت می‌دهند.

## ■ روش‌شناسی پژوهش

هدف این پژوهش، بررسی چگونگی درک دانش‌آموزان از مفهوم متغیر و توصیف اشتباهات مفهومی آنان است و بدین منظور از روش توصیفی از نوع زمینه‌یابی استفاده شده است. این مطالعه، در زمره پژوهش‌های کاربردی محسوب می‌شود، زیرا نتایج آن می‌تواند برای بهبود برنامه‌ریزی‌های آموزشی و طراحی برنامه‌های درسی و کمک به اتخاذ تصمیم‌های آموزشی، به‌کار برده شود.

## ■ جامعه و نمونه آماری پژوهش

جامعه آماری این پژوهش، را کلیه دانش‌آموزان دختر پایه اول دوره دوم متوسطه دو ناحیه آموزشی در تهران بزرگ، در سال تحصیلی ۹۲-۹۱ تشکیل می‌دادند. به روش نمونه‌گیری در دسترس، ۱۸۵ نفر از این دانش‌آموزان انتخاب شدند. این نمونه‌گیری با انتخاب یک یا دو کلاس از پنج دبیرستان این دو ناحیه آموزشی که مدیران و معلمان آن‌ها همکاری‌های لازم را برای اجرای آزمون مبدول داشتند صورت گرفت.

## ■ ابزار گردآوری داده‌ها

برای گردآوری داده‌ها، از یک آزمون و نیز مصاحبه‌های نیمه‌ساختاری استفاده شد. براساس چارچوب تریگروس و یورسینی (۲۰۰۳) در مورد تفسیر نمود، مطابق جدول ۱ و براساس سؤال‌های آزمون کوچمن (۱۹۷۸) و تریگروس و یورسینی (۲۰۰۳)، آزمونی چهارگزینه‌ای جهت بررسی درک دانش‌آموزان از مفهوم متغیر و تشخیص اشتباهات مفهومی آن‌ها در این حوزه، طراحی شد. برای کسب اطلاعات عمیق‌تر از دانش‌آموزانی که پاسخ‌هایشان ناکافی و یا نوع اشتباهات آن‌ها نامعلوم بود، مصاحبه‌هایی در محل برگزاری آزمون‌ها با ۳۰ داوطلب صورت گرفت. در مصاحبه نیمه‌ساختاری، سؤال‌ها از قبل طراحی می‌شوند و هدف، کسب اطلاعات عمیق از مصاحبه‌شونده است. این روش با انعطاف‌پذیری براساس پاسخ‌های آزمودنی، به تنظیم سؤال‌ها می‌پردازد (بازرگان، سرمد و حجازی، ۱۳۹۰). در هر مصاحبه از ۱ تا ۳ سؤال از دانش‌آموزان پرسیده شد و مدت زمان هر مصاحبه، از ۱۰ الی ۲۰ دقیقه به طول انجامید.

برای تعیین روایی محتوایی آزمون از دیدگاه‌های چهار نفر از استادان گروه ریاضی و چهار نفر از دبیران مشغول به تحصیل در رشته آموزش ریاضی دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی استفاده شد. برای بررسی پایایی آزمون، پس از اجرای آن بر روی یک نمونه کوچک ۳۲ نفری از دانش‌آموزان پایه اول دوره دوم متوسطه، از برآورد ضریب آلفای کرونباخ استفاده شد که میزان آن برای این آزمون، ۰/۸۱۱ بود.

## ■ یافته‌های پژوهش

در این قسمت، پس از ارائه نتایج بررسی عملکرد دانش‌آموزان در درک متغیر، نتایج تجزیه و تحلیل پاسخ‌های دانش‌آموزان، به تفکیک هر سؤال، ارائه می‌شود و در پایان به سؤال‌های پژوهش پاسخ داده می‌شود. **بررسی عملکرد دانش‌آموزان در درک متغیر:** در این آزمون، از آماره‌های میانگین و انحراف معیار برای توصیف چگونگی درک دانش‌آموزان در هر یک از سه کاربرد اصلی متغیر به‌عنوان مجهول خاص، عدد عمومی و رابطه‌ی تابعی استفاده شده است. همان‌طور که در جدول ۳ مشاهده می‌شود، در این آزمون، عملکرد دانش‌آموزان در سؤال‌های اختصاص‌یافته به متغیر به‌عنوان رابطه‌ی تابعی با میانگین ۵۶٪ و انحراف معیار ۳۶٪، و متغیر به‌عنوان مجهول خاص با میانگین ۵۴٪ و انحراف معیار ۳۲٪ بود. ضعیف‌ترین عملکرد آنان با میانگین ۳۷٪ و انحراف معیار ۲۵٪، در سؤال‌های اختصاص‌یافته به متغیر، به‌عنوان عدد عمومی، بود.

جدول ۳. عملکرد دانش‌آموزان در درک متغیر

کاربردهای متغیر	میانگین (درصد)	انحراف معیار (درصد)
مجهول خاص	۵۴	۳۲
عدد عمومی	۳۷	۲۵
رابطه تابعی	۵۶	۵۶

**پاسخ به سؤال‌های آزمون:** به‌منظور بررسی درک دانش‌آموزان از مفهوم متغیر و اشتباهات مفهومی آن‌ها در این رابطه، به بررسی پاسخ‌های ارائه‌شده توسط دانش‌آموزان به چهار سؤال از آزمون پرداخته می‌شود و اطلاعات آماری جمع‌آوری‌شده در قالب جدول‌های فراوانی (درصد) ارائه می‌گردد. در مواقعی هم که از مصاحبه برای روشن‌تر شدن پاسخ‌ها استفاده شده، به تناسب، به آن‌ها ارجاع داده شده است. در ضمن، برای حفظ محرمانیت افراد، از اسامی مستعار استفاده شده است.

### سؤال ۱

در یک مغازه میوه‌فروشی، قیمت هر عدد پرتقال ۴۰ تومان و قیمت هر عدد سیب ۲۰ تومان است. اگر  $p$  نشان‌دهنده تعداد پرتقال‌های خرید شده و  $s$  تعداد سیب‌های خرید شده از این میوه‌فروشی باشد، عبارت  $40p + 20s$  نشان‌دهنده چه چیزی است؟

الف. مجموع قیمت میوه‌های خریداری شده      ب. تعداد کل میوه‌های خرید شده

ج. ۶۰ پرتقال و سیب      د. ۴۰ پرتقال و ۲۰ سیب



این سؤال، توانایی دانش‌آموزان را در درک مفهوم متغیر به‌عنوان مجهول خاص و تعیین و تشخیص آن در مسئله، مورد بررسی قرار می‌دهد. دانش‌آموزان باید بتوانند مجهول را، با توجه به شرایط مسئله، به‌درستی تعیین کنند.  $1/55$  درصد از دانش‌آموزان، گزینه (الف) را که پاسخ درست است، انتخاب کردند. لازمه این انتخاب این بود که دانش‌آموزان، بتوانند متغیرهای  $p$  و  $s$  را به تعداد پرتقال‌ها و تعداد سیب‌های خریداری‌شده نسبت دهند و عبارت  $40p + 20s$  را به‌عنوان مجموع قیمت میوه‌های خریداری‌شده در نظر بگیرند. همچنین،  $7/15$  درصد دانش‌آموزان گزینه (ب)،  $1/15$  درصد گزینه (ج) و  $9/11$  درصد، گزینه (د) را انتخاب کردند. مصاحبه‌های انجام‌شده نشان داد که برخی از دانش‌آموزان، به‌جای تعداد اشیاء، متغیرها را به‌اشتباه، به خود اشیاء نسبت دادند یا متغیر را به‌عنوان مخفی برای نام اشیاء در نظر گرفتند. مصاحبه ذیل که با یکی از آن‌ها صورت گرفته است، این مطلب را به‌وضوح نشان می‌دهد.

مصاحبه‌گر: در عبارت  $40p + 20s$ ، متغیر  $p$  چه چیزی را نشان می‌دهد؟

مریم: پرتقال خریداری‌شده را.

مصاحبه‌گر:  $40p$  چه چیزی را نشان می‌دهد؟

مریم:  $40p$  یعنی  $40$  تا پرتقال خریداری‌شده و  $20s$  هم یعنی  $20$  تا سیب خریداری‌شده.

مصاحبه‌گر: پس عبارت  $40p + 20s$  نشان‌دهنده چیست؟

دانش‌آموز: کل میوه‌های خریداری‌شده.

در واقع، این دانش‌آموز متغیرهای  $s$  و  $p$  را به‌عنوان برچسبی برای سیب و پرتقال خریداری‌شده در نظر گرفته است، نه برای تعداد آن‌ها. دانش‌آموزانی که دچار این اشتباه شده‌اند، تعداد سیب‌های خریداری‌شده را  $20$  و تعداد پرتقال‌های خریداری‌شده را  $40$  در نظر گرفتند. این نشان می‌دهد که دانش‌آموزان، در فهمیدن اینکه متغیرهای  $s$  و  $p$ ، هر کدام نشان‌دهنده تعداد نامعلوم سیب‌ها و پرتقال‌های خریداری‌شده هستند، مشکل دارند. تعدادی از آن‌ها نیز معتقد بودند که  $p$  نشان‌دهنده پرتقال و  $s$  نشان‌دهنده سیب است و عبارت  $40p + 20s$  را به‌صورت  $40$  پرتقال و  $20$  سیب بیان کردند. بعضی از دانش‌آموزان نیز عبارت  $40p + 20s$  را به‌صورت  $60ps$  نوشته و به‌عنوان  $60$  سیب و پرتقال تعبیر می‌کردند. چنین دانش‌آموزانی دارای اشتباه مفهومی «در نظر گرفتن متغیر به‌عنوان برچسب یا مخفی برای نام اشیاء» هستند. طبق بررسی‌های انجام‌شده، برخی از دانش‌آموزانی که گزینه (ج) را انتخاب کرده بودند، دارای اشتباه مفهومی «در نظر گرفتن جملات مختلف به‌عنوان جملات مشابه» نیز بودند و به‌دلیل این اشتباه، عبارت را به‌طور نادرستی ساده کردند. در حقیقت، بسیاری از این دانش‌آموزان، درک درستی از جملات مشابه و نامتشابه نداشتند. نحوه و درصد پاسخ‌گویی دانش‌آموزان به سؤال اول، در جدول ۴ نمایش داده شده است.

جدول ۴. یافته‌های مربوط به سؤال ۱

درصد فراوانی		فراوانی	نوع پاسخ‌های ارائه شده	
۵۵/۱		۱۰۲	الف	درست
۴۲/۷	۱۵/۷	۲۹	ب	نادرست
	۱۵/۱	۲۸	ج	
	۱۱/۹	۲۲	د	
۲/۲		۴	عدم پاسخگویی	
۱۰۰		۱۸۵	جمع کل	

## سؤال ۲.....

اگر  $c$  و  $d$  دو عدد دلخواه باشند، آنگاه در عبارت  $c+d=10$ ، کلیه مقادیری که متغیر  $c$  می‌پذیرد کدام است؟

ب. مقادیر بیشتر از ۱۰

الف. مقادیر کمتر از ۱۰

د. همه مقادیر حقیقی

ج. مقادیر بین ۰ و ۱۰

هدف این سؤال، بررسی توانایی درک دانش‌آموزان از متغیر، به‌عنوان عدد عمومی است. دانش‌آموزان باید قادر باشند مقادیر بی‌شماری را به متغیرها نسبت دهند. گزینه (د) پاسخ درست این سؤال است و ۴۰ درصد دانش‌آموزان این گزینه را انتخاب کردند. همچنین، ۴۳/۲ درصد دانش‌آموزان، گزینه (الف) را انتخاب کردند. از آنجایی که حاصل  $c+d$  برابر با ۱۰ است، این دانش‌آموزان فقط مقادیری را به  $c$  و  $d$  نسبت می‌دادند که از ۱۰ کمتر باشند و مجموعشان از ۱۰ بیشتر نشود، به‌همین دلیل درصد پایینی از دانش‌آموزان گزینه (ب) انتخاب کردند (۱/۷ درصد). گزینه (ج) را نیز ۱۲/۴ درصد از دانش‌آموزان انتخاب کردند. آن‌ها اعداد منفی را برای  $c$  در نظر نگرفتند و فقط مقادیر مثبت ۰ تا ۱۰ را به  $c$  نسبت دادند که بیانگر این است که آن‌ها، مقدار متغیر را همیشه مثبت در نظر می‌گیرند.

قبل از انجام مصاحبه‌ها، به‌نظر می‌رسید که چون دانش‌آموزان مقدار متغیر را مثبت فرض می‌کنند، فقط اعداد مثبت را برای  $c$  و  $d$  در نظر می‌گیرند، ضمن اینکه اعداد بیشتر از ۱۰ را به  $c$  نسبت نمی‌دهند، زیرا حاصل جمع آن‌ها بیشتر از ۱۰ می‌شود. اما مصاحبه‌ها نشان داد که برخی از دانش‌آموزان، فرق بین عمل جمع و نماد مثبت را تشخیص نمی‌دهند و به‌خاطر طرح‌واره‌های ذهنی قبلی‌شان از اعداد صحیح، خواص اعداد صحیح را به‌طور نادرستی به متغیرها هم تعمیم می‌دهند. به‌همین دلیل، با دیدن علامت مثبت کنار متغیر  $d$ ، آن را به‌عنوان یک عدد مثبت در نظر می‌گیرند و اعداد بزرگ‌تر از ۱۰

را به متغیر  $c$  نسبت نمی‌دهند. مصاحبه زیر، معرف تمایز نگذاشتن بین عمل جمع و نماد مثبت  $d$  است.

مصاحبه‌گر:  $c$  و  $d$  چه اعدادی را می‌توانند بپذیرند؟  
 زهرا: هر عدد دلخواهی را.  
 مصاحبه‌گر: یعنی چه اعدادی؟  
 زهرا: یعنی کل اعداد منفی و مثبت و صفر.  
 مصاحبه‌گر: در عبارت  $c+d=10$ ، متغیر  $c$  چه مقادیری را می‌پذیرد؟  
 زهرا: فقط اعداد کمتر از ۱۰ را.  
 مصاحبه‌گر: یعنی  $c$  هیچ وقت نمی‌تواند ۱۲ باشد؟  
 زهرا: نه، چون  $d$  همیشه مثبت است.  
 مصاحبه‌گر: چرا؟  
 زهرا: چون علامت  $d$  مثبت است.  $d$  هیچ وقت نمی‌تواند برابر با یک عدد منفی باشد.

نحوه و درصد پاسخ‌گویی دانش‌آموزان به سؤال ۲ در جدول ۵ نمایش داده شده است.

جدول ۵. یافته‌های مربوط به سؤال ۲

درصد فراوانی		فراوانی	نوع پاسخ‌های ارائه شده	
۴۰		۷۴	د	درست
۵۷/۳	۴۳/۲	۸۰	ب	نادرست
	۱/۷	۳	ج	
	۱۱/۹	۲۳	د	
۲/۷		۵	عدم پاسخ‌گویی	
۱۰۰		۱۸۵	جمع کل	

سؤال ۳.....

اگر  $a$ ،  $b$  و  $c$  اعداد دلخواه باشند، چه زمانی  $a+b$  با  $a+c$  برابر می‌شود؟  
 الف. هیچ‌گاه  
 ب. همیشه  
 ج. زمانی که مقادیر متغیرهای  $b$  و  $c$  با هم برابر شوند.  
 د. نمی‌توان اظهار نظر کرد.

## درک و اشتباهات مفهومی دانش‌آموزان از مفهوم متغیر در هبر مقدماتی

این سؤال، توانایی دانش‌آموزان را از درک متغیر به‌عنوان عدد عمومی مورد بررسی قرار می‌دهد. دانش‌آموزان باید بتوانند مقادیر بی‌شماری را به متغیر نسبت دهند. گزینه (ج) پاسخ صحیح است و  $51/9$  درصد دانش‌آموزان، این گزینه را انتخاب کردند. برای پاسخ‌گویی به این سؤال، دانش‌آموزان باید متغیرهای  $b$  و  $c$  را انعطاف‌پذیر و گیرنده مقادیر بی‌شمار ببینند. علاوه بر این،  $15/7$  درصد دانش‌آموزان، گزینه (الف) را انتخاب کردند. برخی نیز با جایگذاری اعداد دلخواهی در متغیرها، مثلاً  $a=2$  و  $c=3$  و  $b=4$  و با نوشتن  $2+4 \neq 2+3$ ، گزینه (الف) را انتخاب کردند. این دانش‌آموزان با نسبت دادن یک عدد خاص به متغیرها، به این نتیجه رسیدند که دو عبارت  $a+b$  و  $a+c$  هیچ‌گاه با هم برابر نمی‌شوند. برخی نیز استدلال کردند که چون متغیرها از لحاظ ظاهری شبیه به هم نیستند، بنابراین دو عبارت، هیچ‌گاه با هم برابر نمی‌شوند. این دانش‌آموزان، متغیر را به‌عنوان یک مقدار قطعی در نظر می‌گیرند و نمی‌توانند مقادیر بی‌شماری را به آن نسبت دهند.

گزینه (ب)، توسط تنها  $2/7$  درصد دانش‌آموزان انتخاب شد، اما استدلالی که برای انتخاب این گزینه اشتباه ارائه شد، جالب بود. استدلال این بود که اگر مقدار هر سه متغیر یکسان باشد، مثلاً برابر با  $2$ ، پس  $2+2=2+2$  و دو طرف تساوی، همیشه با هم برابر می‌شوند.  $29/7$  درصد هم گزینه (د) را انتخاب کردند. این دانش‌آموزان، بدون داشتن مقادیر عددی متغیرها، نمی‌توانستند با آن‌ها کار کنند.

در مصاحبه‌های صورت‌گرفته، برخی از دانش‌آموزان بیان کردند که «وقتی مقدار متغیرها را نداشته باشیم و ندانیم که چه اعدادی را نشان می‌دهند، چطوری در مورد تساوی آن‌ها اظهار نظر کنیم؟!». یکی از دانش‌آموزان نیز بیان کرد که «حتی اگر مقادیر  $b$  و  $c$  نیز با هم برابر شوند، ممکن است مقدار  $a$  با  $a$  برابر نشود! پس ما حتماً باید مقادیر  $a$  و  $b$  و  $c$  را داشته باشیم تا بتوانیم اظهار نظر کنیم». این دانش‌آموز نمی‌دانست که حروف همانم در یک عبارت جبری، نشان‌دهنده مقادیر یکسان هستند. متن زیر بیانگر این موضوع است.

مصاحبه‌گر: چه زمانی  $a+b$  با  $a+c$  برابر می‌شود؟

مینا: هیچ‌وقت.

مصاحبه‌گر: چرا؟

مینا: اگر بنا بود مقادیری که متغیرهای  $c$  و  $b$  می‌پذیرند با هم برابر شوند، آن‌ها را با حروف یکسان نمایش می‌دادند.

نحوه و درصد پاسخ‌گویی دانش‌آموزان به سؤال ۳، در جدول ۶ نمایش داده شده است.

جدول ۶. یافته‌های مربوط به سؤال ۳

درصد فراوانی		فراوانی	نوع پاسخ‌های ارائه شده	
۵۱/۹		۹۶	ج	درست
۴۸/۱	۱۵/۷	۲۹	الف	نادرست
	۲/۷	۵	ب	
	۲۹/۷	۵۵	د	
۲/۰		۰	عدم پاسخگویی	
۱۰۰		۱۸۵	جمع کل	

سؤال ۴.....

اگر  $x$  و  $y$  دو عدد حقیقی باشند و  $x+y=9$ ، در این عبارت، هنگامی که مقدار  $x$  افزایش می‌یابد، مقدار  $y$  چه تغییری می‌کند؟

- الف. کاهش می‌یابد  
ب. افزایش می‌یابد  
ج. تغییر نمی‌کند  
د. هیچ‌کدام

این سؤال درک دانش‌آموزان را از متغیر در رابطه تابعی مورد بررسی قرار می‌دهد. در این سؤال دانش‌آموزان باید بتوانند رابطه بین متغیرها را به درستی تشخیص دهند. گزینه (الف) پاسخ صحیح است و  $56/8$  درصد دانش‌آموزان، این گزینه را انتخاب کردند. آن‌ها توانستند متغیرها را در یک رابطه تابعی در نظر بگیرند و تغییراتشان را در رابطه با یکدیگر تشخیص دهند. علاوه بر این  $13$  درصد دانش‌آموزان گزینه (ب) را انتخاب کردند. آنان این‌گونه استدلال کردند که «چون مقدار  $x$  افزایش پیدا می‌کند و رابطه بین  $x$  و  $y$  خطی است، پس مقدار  $y$  هم افزایش می‌یابد» که مبین درک رویه‌ای آن‌ها از رابطه خطی است. برخی نیز عنوان کردند که «به دلیل اینکه بین متغیرها علامت جمع وجود دارد، پس وقتی  $x$  افزایش می‌یابد، مطمئناً  $y$  هم افزایش می‌یابد». از این گذشته،  $27/5$  درصد دانش‌آموزان گزینه (ج) را انتخاب کردند. برخی از آن‌ها مقداری مانند عدد  $2$  را به  $x$  نسبت دادند و معادله را به صورت  $2+y=9$  نوشتند و با افزایش دادن یک واحد به مقدار  $x$ ، به طرف دوم معادله نیز یک واحد اضافه کرده و حاصل جمع را به صورت  $3+y=10$ ، تغییر دادند. آن‌ها به این نتیجه رسیدند که «با افزایش مقدار  $x$ ، فقط حاصل جمع تغییر می‌کند و مقدار  $y$  تغییر نمی‌کند». این دانش‌آموزان درک نمی‌کردند که مجموع دو متغیر یک مقدار ثابت است و تغییر نمی‌کند و این مقادیر متغیرها هستند که، در یک رابطه نظام‌مند، تغییر می‌کنند. برخی از آن‌ها نیز ابراز کردند که «چون فقط مقدار متغیر  $x$  تغییر می‌کند و مقدار  $y$  تغییر نمی‌کند، پس حاصل جمع تغییر می‌کند نه مقدار  $y$ » که نشان می‌دهد. این دانش‌آموزان رابطه بین متغیرها

## درک و اشتباهات مفهومی دانش‌آموزان از مفهوم متغیر در هپر مقدماتی

را درک نمی‌کردند. چند نفری هم استدلال کردند که «چون  $\gamma$  را افزایش یا کاهش نداده‌ایم، پس مقدار متغیر  $\gamma$  تغییر نمی‌کند». نحوه و درصد پاسخگویی دانش‌آموزان به سؤال ۴ در جدول ۷ نمایش داده شده است.

جدول ۷ یافته‌های مربوط به سؤال ۴

درصد فراوانی		فراوانی	نوع پاسخ‌های ارائه‌شده	
۵۶/۸		۱۰۵	الف	درست
۴۳/۲	۱۳	۲۴	ب	نادرست
	۲۷/۵	۵۱	ج	
	۲/۷	۵	د	
۰		۰	عدم پاسخگویی	
۱۰۰		۱۸۵	جمع کل	

## پاسخ به سؤال‌های پژوهش

به استناد نتایج به‌دست آمده، به سؤال‌های پژوهش پاسخ داده می‌شود.

**سؤال اول پژوهش:** درک دانش‌آموزان پایه اول دوره دوم متوسطه از مفهوم متغیر چگونه است؟

طبق نتایج به‌دست آمده، بسیاری از دانش‌آموزان درک محدودی از کاربردهای متغیرها در مسائل دارند. مثلاً نمی‌توانند به درستی مجهول خاص را در مسائل مشخص کنند و نمادهایی را که نشان‌دهنده مقادیر خاص در مسئله هستند، به درستی درک کنند، به متغیرها مقادیر بی‌شماری را نسبت دهند و رابطه بین متغیرها را در مسئله به درستی شناسایی کنند. در این پژوهش، عملکرد دانش‌آموزان در درک متغیر به عنوان عدد عمومی نسبت به درک متغیر به عنوان مجهول خاص و در رابطه تابعی، ضعیف‌ترین عملکرد بود. دانش‌آموزان در اکثر مواقع، متغیر را در معادلات به عنوان مجهول دیده‌اند و به دنبال پیدا کردن جواب‌های محدودی برای متغیرها بوده‌اند و همین امر موجب شده که آن‌ها نتوانند به متغیر مقادیر بی‌شماری نسبت دهند.

**سؤال دوم پژوهش:** اشتباهات مفهومی دانش‌آموزان پایه اول دوره دوم متوسطه در رابطه با متغیر

کدام‌اند؟

- بنا بر نتایج به‌دست‌آمده، اشتباهات مفهومی دانش‌آموزان پایه‌اول دوره‌دوم متوسطه در رابطه با مفهوم متغیر شناسایی شده و به‌صورت زیر دسته‌بندی می‌گردد:
۱. در نظر گرفتن متغیر به‌عنوان برچسب یا مخفف نام اشیا؛
  ۲. در نظر گرفتن متغیر به‌عنوان یک عدد خاص؛
  ۳. تعیین مقدار متغیر با توجه به علامت آن؛
  ۴. در نظر گرفتن جملات نامتشابه به‌عنوان جملات متشابه؛
  ۵. مقدار یکسان نداشتن متغیرهای ناهمنام؛
  ۶. مثبت در نظر گرفتن متغیر؛

بعضی از این دسته‌ها، با بسامد بالاتری مشاهده شد که به این دلیل، به اجمال به آن‌ها پرداخته می‌شود.

۱. **در نظر گرفتن متغیر به‌عنوان برچسب یا مخفف نام اشیا:** برخی از دانش‌آموزان، متغیر را به‌عنوان برچسبی برای اشیا یا مخفف نام اشیا در نظر می‌گیرند. مثلاً در سؤال ۱، بعضی از آن‌ها، متغیرهای  $s$  و  $p$  را به‌جای تعداد سیب‌ها و پرتقال‌های خریده‌شده، به‌عنوان سیب و پرتقال یا به‌صورت سیب و پرتقال خریده‌شده در نظر گرفتند. در واقع این دانش‌آموزان، به‌جای اینکه تعداد سیب و تعداد پرتقال‌های خریده‌شده را به‌عنوان متغیر بپذیرند، آن‌ها را به‌عنوان برچسب یا مخففی برای اسامی میوه‌ها در نظر گرفتند. نتایج پژوهش‌های اسکویت استیونز، نات و آلی‌بالی<sup>۴۱</sup> (۲۰۰۷)، استیسی و مک‌گریگور (۱۹۹۷)، کوچمن (۱۹۷۸)، فیلیپ (۱۹۹۲)، آگوداوات<sup>۴۲</sup> (۲۰۱۱)، سامو (۲۰۰۸)، لی (۲۰۰۶) و بوث (۱۹۸۸) این یافته را تأیید می‌کنند.
۲. **در نظر گرفتن متغیر به‌عنوان یک عدد خاص:** برخی از دانش‌آموزان متغیر را یک عدد ثابت تلقی می‌کنند و یک عدد خاص را به آن نسبت می‌دهند. مثلاً در سؤال ۳، برخی از دانش‌آموزان با توجه به‌ظاهر متغیرها، به هرکدام از آن‌ها یک مقدار عددی خاص نسبت دادند و به این نتیجه رسیدند که دو عبارت  $a+b$  و  $a+c$ ، هیچ‌گاه نمی‌توانند با هم برابر باشند. نتایج پژوهش‌های لی (۲۰۰۶)، ساهین و سویلا (۲۰۱۱)، کوچمن (۱۹۷۸)، مک‌گریگور و استیسی (۱۹۹۷)، سامو (۲۰۰۸)، مؤید این یافته است.
۳. **تعیین مقدار متغیر با توجه به علامت آن:** این اشتباه مفهومی به وسیله مصاحبه‌هایی که با دانش‌آموزان صورت گرفت شناسایی شد. نتایج به‌دست‌آمده از سؤال ۲ نشان داد که برخی از دانش‌آموزان  $d +$  را به‌عنوان یک عدد همیشه مثبت در نظر می‌گیرند. این دانش‌آموزان مقادیر را با توجه به نوع علامت متغیر به آن نسبت می‌دهند و درک درستی از اینکه یک متغیر می‌تواند مقادیر مثبت یا منفی مختلفی را بپذیرد، ندارند. این اشتباه مفهومی ممکن است ناشی از تأثیر

## درک و اشتباهات مفهومی دانش‌آموزان از مفهوم متغیر در هبر مقدماتی

- طرح‌واره‌های قبلی مربوط به اعداد صحیح باشد. در حقیقت، دانش‌آموزان متغیر را مانند یک عدد می‌بینند که علامتی که با آن می‌آید، تعیین‌کننده مثبت یا منفی بودن آن است.
۴. در نظر گرفتن جملات نامتشابه به عنوان جملات متشابه: تعدادی از دانش‌آموزان به دلیل نداشتن درک درست از مفهوم متغیر، جملات متشابه و نامتشابه را به صورت مفهومی درک نکرده‌اند. در واقع این دانش‌آموزان نمی‌توانند درک کنند که متغیرهای مختلف در یک مسئله، نشان‌دهنده مقادیر متفاوتی هستند. بعضی از دانش‌آموزان به دلیل داشتن این اشتباه مفهومی، هنگام ساده کردن عبارات جبری، جملات نامتشابه را مانند جملات متشابه باهم جمع می‌کنند. مثلاً دیدیم که در سؤال ۱، برخی از دانش‌آموزان، عبارت جبری  $20s + 4p$  را به صورت  $60ps$  ساده کردند و آن را به عنوان ۶۰ سیب و پرتقال تفسیر کردند. نتایج پژوهش‌های بوث (۱۹۸۸)، استیسی و مک‌گریگور (۱۹۹۷)، ساهین و سویلا (۲۰۱۱)، کوچمن (۱۹۷۸) این یافته را تأیید می‌کنند.
۵. مقدار یکسان نداشتن متغیرهای ناهمنام: بعضی از دانش‌آموزان به علت درک ناقص و یا محدود خود از متغیر، مرتکب این اشتباه مفهومی می‌شوند. این دانش‌آموزان، نمی‌دانند چگونه مقادیر زیادی را به متغیر نسبت دهند و لذا متغیر را به عنوان یک مقدار ثابت و انعطاف‌ناپذیر درک کرده‌اند. مثلاً در سؤال ۳، برخی از دانش‌آموزان معتقد بودند که دو عبارت  $a+b$  و  $a+c$ ، هیچ‌گاه باهم برابر نمی‌شوند، زیرا متغیرهای  $b$  و  $c$  هیچ‌گاه نمی‌توانند مقادیر یکسانی را بپذیرند. در واقع، آن‌ها فکر می‌کنند که هر متغیر، با توجه به ظاهر خود، مقدار خاصی را نشان می‌دهد و متغیرهای به ظاهر متفاوت، مقادیر متفاوتی می‌پذیرند. نتایج پژوهش‌های کوچمن (۱۹۷۸) و گراهام<sup>۴۳</sup> و توماس<sup>۴۴</sup> (۲۰۰۰)، این یافته را تأیید می‌کند.
۶. مثبت در نظر گرفتن متغیر: برخی از دانش‌آموزان ماهیت متغیر را مثبت در نظر می‌گیرند. مثلاً در سؤال ۲، برخی از دانش‌آموزان معتقد بودند که متغیرهای  $c$  و  $d$ ، همیشه مقادیر مثبت را می‌پذیرد. نتایج پژوهش‌های کوچمن (۱۹۷۸)، این یافته را تأیید می‌کند.

## ■ بحث و نتیجه‌گیری ■

اشتباه مفهومی عبارت از درک ناقص یا نادرست یک مفهوم است که برای دانش‌آموزانی که با آن مواجه هستند، معنادار و کارآمد است. درک اشتباهات مفهیم، بخشی از فرایند یادگیری دانش‌آموزان است که بر روی یادگیری مطالب جدید، تأثیر منفی می‌گذارد و باعث ایجاد مشکلاتی برای دانش‌آموزان می‌شود. درک اشتباه مفهیم امری تصادفی یا ناشی از بی‌دقتی نیست بلکه دارای ساختارهای شناختی محکمی است که به راحتی اصلاح نمی‌شود و موجب بروز خطاهای نظام‌مند می‌گردد. یکی از وظایف مهم معلمان، شناسایی اشتباهات مفهومی دانش‌آموزان است. آن‌ها باید،



یادگیری‌های قبلی دانش‌آموزان را محک بزنند و با استفاده از روش‌های مختلف از قبیل طرح سؤال‌های هدف‌دار برای دانش‌آموزان و بررسی پاسخ‌های نادرست آن‌ها و همچنین مصاحبه با دانش‌آموزان، به شناسایی اشتباهات مفهومی آن‌ها بپردازند. با این حال، تنها «شناسایی» اشتباهات مفهومی کافی نیست و وظیفه مهم‌تر معلمان، «اصلاح» این اشتباهات است. برای رسیدن به این هدف، لازم است معلمان، ابتدا به ریشه‌یابی علل اشتباهات مفهومی دانش‌آموزان بپردازند تا بتوانند با ایجاد راهکارهای مؤثر، این اشتباهات را از بین ببرند و آن‌ها را اصلاح کنند. معلمان می‌توانند با ایجاد تناقض‌هایی در ذهن دانش‌آموزان و ارائه دلایل منطقی برای نادرستی تفکرات آن‌ها، بنیان این اشتباهات مفهومی را در ذهن دانش‌آموزان فرو بریزند و مفهوم صحیح را جایگزین آن نمایند.

نتایج این پژوهش نشان داد که دانش‌آموزان اغلب درک ناقص و محدودی از مفهوم متغیر دارند. بسیاری از دانش‌آموزان نمی‌توانند مفهوم متغیر را، با توجه به شرایط مسئله، به‌درستی درک کنند. همچنین، در درک متغیر به‌عنوان عدد عمومی، ضعیف‌ترین عملکرد را نسبت به مجهول خاص و در رابطه تابعی دارند. به‌علاوه، نتایج نشان داد که دانش‌آموزان دارای اشتباهات مفهومی متعددی در رابطه با مفهوم متغیر هستند.

با اینکه درک مفهوم متغیر زیربنای درک بسیاری از مفاهیم جبری است، اما در بسیاری از کلاس‌های درس جبر به‌ندرت مورد بحث قرار می‌گیرد (گراهام و توماس، ۲۰۰۰). معلمان باید به‌منظور بالا رفتن درک دانش‌آموزان از متغیر، در مورد این مفهوم در کلاس‌های خود بیشتر بحث کنند و اهمیت و لزوم کاربرد متغیر را در حل مسائل جبری بیشتر توضیح دهند. از جمله می‌توانند، در ابتدا، با مجسم‌سازی و ملموس نمودن این مفهوم، آن را آموزش دهند، تا دانش‌آموزانی که هنوز به مرحله عملیات انتزاعی نرسیده‌اند، به‌تدریج توانایی درک آن را به‌دست آورند و به یادگیری عمیق این مفهوم برسند. ضروری است که معلمان، دانش‌آموزان را با کاربردهای مختلف متغیر مواجه سازند و در مورد متغیرها در مسائل متفاوت و در موقعیت‌های مختلف، با دانش‌آموزان بحث کنند و تفاوت‌های آن‌ها را شرح دهند. مؤلفان کتب درسی و برنامه‌ریزان آموزشی نیز، می‌توانند با در نظر گرفتن یک تعریف جامع و کامل از مفهوم متغیر و با معرفی کاربردهای آن و تأکید بر شباهت‌ها و تفاوت‌های آن‌ها و طراحی فعالیت‌های مناسب، کاربردهای چندگانه این مفهوم را به‌طور منسجم و یکپارچه، به دانش‌آموزان نشان دهند.

## درک و اشتباهات مفهومی دانش‌آموزان از مفهوم متغیر در هجرت مقدماتی

## منابع

- انگلیش، لین و وارن، الیزابت (۱۳۷۷). معرفی مفهوم متغیر از طریق الگویابی. (ترجمه سهیلا غلام‌آزاد). رشد آموزش ریاضی، ۱۴ (۵۴)، ۵۴-۶۰.
- سرمد، زهره؛ عباس، بازرگان و الهه، حجازی (۱۳۹۰). روش‌های تحقیق در علوم رفتاری (چاپ بیست و یکم). تهران: انتشارات آگاه.
- صادقی، مریم (۱۳۸۷). بررسی مهارت تعمیم جبری در دانش‌آموزان دختر سال اول متوسطه شهرستان مبارکه (پایان‌نامه منتشر نشده کارشناسی ارشد آموزش ریاضی). دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی، دانشکده علوم پایه، تهران.
- علم‌الهدایی، حسن (۱۳۸۸). اصول آموزش ریاضی. انتشارات دانشگاه فردوسی مشهد.
- کریمی‌کیا، خدیجه (۱۳۹۱). تثبیت درک دانش‌آموزان از معادله درجه اول به کمک شناسایی اشتباهات آن (پایان‌نامه منتشر نشده کارشناسی ارشد آموزش ریاضی). دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی، دانشکده علوم پایه، تهران.
- Asquith, P., Stephens, A. C., Knuth, E. J., & Alibali, M. W. (2007). Middle School Mathematics Teachers' Knowledge of Students' Understanding of Core Algebraic Concepts: Equal Sign and Variable. *Mathematical Thinking and Learning: An International Journal*, 9(3), 249-272.
- Booth, L. R. (1988). Children's Difficulties in Beginning Algebra. In A.F. Coxford & A.P. Shulte (Eds.), *The Ideas of Algebra, K-12*. (pp. 8-19). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Egodawatte, G. (2011). *Secondary School Students' Misconceptions in Algebra*, Department of Curriculum, Teaching and Learning (PhD Thesis). University of Toronto.
- Foster, D. (2007). Making Meaning in Algebra: Examining Students' Understandings and Misconceptions. In A. H. Schoenfeld (Ed.), *Assessing Mathematical Proficiency*, (PP.163-176). New York: Cambridge University Press.
- Graham, A. T., & Thomas, M. O. J. (2000). Building a Versatile Understanding of Algebraic Variables with a Graphic Calculator. *Educational Studies in Mathematics*, 41(3), 265-282.
- Hammer, D. (1996). Misconceptions or P-Primes: How Many Alternative Perspectives of Cognitive Structure Influence Instructional Perceptions and Intentions? *The Journal of the Learning Science*, 5, 97-127.
- Küchemann, D. (1978). Children's Understanding of Numerical Variables. *Mathematics in School*, 9, 23-26.
- Li, X. (2006). *Cognitive Analysis of Students' Errors and Misconceptions in Variables, Equations and Functions* (PhD thesis). Texas A&M University.
- Mamba, F. T. (2011). *An Investigation into Students' Misconceptions in Linear Equations in Public Secondary Schools of Malawi: The Case of the South Eastern Education Division*. Hiroshima University, Japan.
- National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: The National Council.
- Philipp, R. A. (1992). The Many Uses of Algebraic Variables. *The Mathematics Teacher*, 85(7), 557-561.
- Rosnick, P. (1981). Some Misconceptions Concerning the Concept of Variable: Are You Careful about Defining Your Variables? *Mathematics Teacher*, 74, 418-420.
- Sahin, O. & Soylu, Y. (2011). Mistakes and Misconceptions of Elementary School Students about the Concept of Variable. *Procedia Social and Behavioral Sciences*, 15, 3322-3327.
- Samo, M. (2008). *Students' Perceptions about the Symbols, Letters and Signs in Algebra and How Do These Affect Their Learning of Algebra: A Case Study in a Government Girls Secondary School* (MSc thesis). Aga

Khan University.

- Soygür, M. (2008). *Misconceptions of Students in Algebra Lessons: An Investigation of the Issue in the Middle Schools of the TRNC* (MSc thesis). Eastern Mediterranean University, Faculty of Education
- Stacey, K. & MacGregor, M. (1997). Ideas about Symbolism that Students Bring to Algebra. *The Mathematics Teacher*, 2(90), 110-113.
- Trigueros, M. & Ursini, S. (2001). A Model for the Uses of Variable in Elementary Algebra. In: Van den Heuvel-Panhuizen, M. (Ed.), *Proceedings of the 25th conference of the international Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol:4, PP.327-334). Utrecht, Netherlands: Freudenthal Institute.
- Trigueros, M. & Ursini, S. (2003). First-year Undergraduates' Difficulties in Working with Different Uses of Variable. In A. Selden, E. Dubinsky, G. Harel & F. Hitt (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education* (vol. 12, pp. 1-29). Providence, RI: American Mathematical Society.
- Usiskin, Z. (1988). Conceptions of School Algebra and Uses of Variables. In A. F. Coxford & A. P. Schulte (Eds.), *The Ideas of Algebra* (pp. 8-19). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

### پی‌نوشت‌ها

- |                                                       |                                         |
|-------------------------------------------------------|-----------------------------------------|
| 1. Mamba                                              | 23. Varying quantities                  |
| 2. National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) | 24. Parameter                           |
| 3. Foster                                             | 25. Abstract symbols                    |
| 4. general number                                     | 26. conceptualization                   |
| 5. English                                            | 27. representation                      |
| 6. Warren                                             | 28. interpretation                      |
| 7. Küchemann                                          | 29. manipulation                        |
| 8. Trigueros                                          | 30. factor                              |
| 9. Ursini                                             | 31. simplify                            |
| 10. Sahin                                             | 32. expand                              |
| 11. Soylu                                             | 33. balance                             |
| 12. Dede                                              | 34. Rosnick                             |
| 13. Argün                                             | 35. Booth                               |
| 14. Soygür                                            | 36. MacGregor                           |
| 15. Hammer                                            | 37. Stacey                              |
| 16. Hart                                              | 38. Ali                                 |
| 17. Usiskin                                           | 39. Murat                               |
| 18. Philipp                                           | 40. Samo                                |
| 19. Label                                             | 41. Asquith, Ste Phens, knuth & Alibali |
| 20. Constant                                          | 42. Egodawatte                          |
| 21. Unknown                                           | 43. Graham                              |
| 22. Generalized numbers                               | 44. Thomas                              |